En appliquant (8) avec $\tilde{\xi} = J\xi, \tilde{\eta} = J\eta, \tilde{\zeta} = \zeta$, nous obtenons

$$\begin{aligned} d\omega(\xi,\eta,\zeta) &= -J\xi < J\eta, J\zeta > - J\eta < \zeta, -\xi > - \zeta < J\xi, -\eta > \\ &= -J\xi < \eta,\zeta > + J\eta < \zeta,\xi > - \zeta < \xi, J\eta > . \end{aligned}$$

Finalement on permute les vecteurs ξ, η, ζ de façon cyclique et on prend la somme des trois égalités ainsi obtenues:

$$\begin{aligned} 3d\omega(\xi,\eta,\zeta) &= -J\xi < \eta,\zeta > + J\eta < \zeta,\xi > - \zeta < \xi, J\eta > \\ &\quad - J\eta < \zeta,\xi > + J\zeta < \xi,\eta > - \xi < \eta, J\zeta > \\ &\quad - J\zeta < \xi,\eta > + J\xi < \eta,\zeta > - \eta < \zeta, J\xi > \\ &= -d\omega(\xi,\eta,\zeta), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de $d\omega(\xi, \eta, \zeta) = 0$.

Remarque. La démonstration du lemme 1 reste valable si l'on remplace l'ensemble de toutes les sous-variétés complexes locales de dimension 1 par une famille $\mathscr{F}$ suffisamment large: Les éléments de $\mathscr{F}$ doivent être à la fois des sous-variétés complexes locales de dimension 1 et des surfaces minimales par rapport à la métrique riemannienne induite, et pour chaque $x \in M$ et chaque vecteur tangent $\xi \in T_x M$ on doit avoir un feuilletage local par des membres de la famille $\mathscr{F}$ de sorte que la feuille passant par x ait ξ comme vecteur tangent. Ainsi il suffit par exemple de contrôler pour une métrique hermitienne donnée sur l'espace projectif $\mathbf{CP}^n$ que toutes les droites projectives dans $\mathbf{CP}^n$ sont des surfaces minimales par rapport à la métrique riemannienne induite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Holmann, H. und H. Rummler. *Alternierende Differentialformen.* Bibliographisches Institut (1972).

[2] Kobayashi, S. and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometrie.* John Wiley & Sons (1963/69).

[3] Martinelli, E. Generalizzazione dei teoremi di minimo volume di Wirtinger a tutte le varietà kähleriane o quasi-kähleriane. *Ann. Mat. Pura et Appl. 4/50* (1960), pp. 135-147.

[4] Wirtinger, W. Eine Determinantenidentität und ihre Anwendung auf analytische Gebilde in Euklidischer und Hermitischer Massbestimmung. *Monatsh. f. Math. u. Phys. 44* (1936), pp. 343-365.

(Reçu le 1er mai 1978)

Hansklaus Rummler

Institut des Hautes Etudes scientifiques
F-91440 — Bures-sur-Yvette