

7. Computation of Slv

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

for all r . Therefore $ISf(0) = 0$ and hence $f(0) = 0$ by (8). If this result is applied to $(T_y^{-1})^* f$ it follows that $f(y) = 0$ for arbitrary y , so that f is indeed identically zero.

7. COMPUTATION OF SIv

It is easy to show that $S_{ij,hk}(y) = [S\gamma_{ij,\cdot}(y)]_{hk}$ is a Calderon-Zygmund kernel for any choice of the indices; in other words, it is homogeneous of degree $-n$, and its mean-value over the unit sphere is 0. If $v \in L^p$, $1 < p < \infty$, it follows by the Calderon-Zygmund theory that the principal value

$$\text{pr. v. } \int_B v_{ij}(x) S_{ij,hk}(x-y) dx$$

exists almost everywhere, and that it is the limit in $L^p(B)$ of the corresponding truncated integrals. In view of (7) it follows that the integral

$$(9) \quad \Gamma v(y)_{hk} = \int_B v_{ij}(x) \Gamma_{ij,hk}(x, y) dx$$

will also exist as a principal value almost everywhere. One finds, however, that the remainder in (7) makes it possible to assert merely that the principal value is a limit in $L^{p'}$ for any $p' < p/n$. In these circumstances it is natural to assume that $v \in L^p(B)$ for all $p \geq 1$.

THEOREM 2. *If $v \in L^p(B)$ with $p > n$, then $SIv \in L^{p'}(B)$ for all $1 \leq p' < p/n$, and*

$$(10) \quad SIv = -b_n v + \Gamma v$$

where $b_n = 4\omega_n/(n+2)$ and Γv is defined by (9).

Proof. Let φ be an SM_n -valued test-function. The definition of SIv as a distribution leads to the following formal computation:

$$\begin{aligned} \int_B SIv(y)_{hk} \varphi(y)_{hk} dy &= - \int_B Iv(y)_k S^* \varphi(y)_k dy \\ &= - \int_B S^* \varphi(y)_k dy \int_B v_{ij}(x) \gamma_{ij,k}(x, y) dx \\ &= - \int_B v_{ij}(x) dx \int_B S^* \varphi(y)_k \gamma_{ij,k}(x, y) dy \\ &= - \int_B v_{ij}(x) dx [b_n \varphi_{ij}(x) - \int_B \varphi(y)_{hk} \Gamma_{ij,hk}(x, y) dy]. \end{aligned}$$

The justification, by means of the Zygmund-Calderon theory, is routine, and (10) follows.

Taken together, Theorems 1 and 2 lead to a very striking result:

THEOREM 3. *An SM_n -valued function $v \in L^p(B)$, $p > n$, is of the form $v = Sf$ with $f = 0$ on $S(1)$ if and only if it satisfies the homogeneous integral equation $\Gamma v = -a_n v$ with $a_n = c_n - b_n = 2(n-2)(n+1)\omega_n/n(n+2)$.*

Indeed, if v is of this form, Theorem 1 implies $c_n f = -Iv$, hence $c_n v = -SIv$, and consequently $\Gamma v = (b_n - c_n)v$ by Theorem 2. Conversely, if $\Gamma v = -a_n v$ then $SIv = -c_n v$ by (10), and $f = Iv$ vanishes on $S(1)$.

The point of Theorem 3 is that the solvability of $Sf = v$ (with an extra condition on f) has been reduced to an integral equation.

THEOREM 4. *For any $v \in L^p(B)$, $p > n$, $S^* \rho [\Gamma v + a_n v] = 0$.*

Proof. Let f be a vector-valued test-function. Theorem 3 applies to Sf , and we obtain by use of Lemma 2

$$\begin{aligned} \int_B S^* \rho \Gamma v \cdot f dx &= - \int_B \rho(x) \Gamma v(x)_{ij} Sf(x)_{ij} dx \\ &= - \int_B \rho(x) Sf(x)_{ij} dx \int_B v(y)_{hk} \Gamma_{hk,ij}(y, x) dy \\ &= - \int_B \rho(y) v(y)_{hk} dy \int_B Sf(x)_{ij} \Gamma_{ij,hk}(x, y) dx \\ &= - \int_B \rho(y) v(y)_{hk} \Gamma Sf(y)_{hk} dy = a_n \int_B \rho(y) v(y)_{hk} Sf(y)_{hk} dy \\ &= - a_n \int_B S^* \rho v \cdot f dy \end{aligned}$$

and hence $S^* \rho \Gamma v = -a_n S^* v$.

THEOREM 5. *Every v which is in all $L^p(B)$ has a unique representation in the form $v = v' + v''$ where v' and v'' are in all $L^p(B)$ while v' is in the image of SI and v'' is in the kernel of $S^* \rho$.*

As a consequence of Theorems 3 and 4 the representation is given by

$$c_n v = -SIv + (\Gamma v + a_n v).$$

It is unique, for if $SI = \Gamma v + a_n v$, then $S^* \rho SIv = 0$ so that Iv is harmonic and 0 on $S(1)$, hence identically zero.