

3. Invariance properties

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

is the normalized and symmetrized Jacobian; it carries the quasiconformal data of the mapping.

The Riemannian metric $ds^2 = {}^t dx (MF) dx$ is conformally flat, a condition expressed by the vanishing of the conformal curvature tensor. For $n = 3$ this tensor is identically zero, but there is instead an integrability condition.

Let $F(x, t)$ be a one-parameter family of homeomorphisms such that $F(x, 0) = x$, $\dot{F}(x, 0) = f(x)$. Under suitable regularity conditions $(DF)_0 = Df$, $(XF)_0 = Df - \frac{1}{n} \text{tr } Df \cdot 1_n$, and $(MF)_0 = Df + {}^t Df - \frac{2}{n} \text{tr } Df \cdot 1_n$. This motivates introducing the differential operator S defined by

$$(Sf)_{ij} = \frac{1}{2} (D_i f_j + D_j f_i) - \frac{1}{n} \delta_{ij} D_k f_k.$$

(The summation convention is in force in this paper). Note that Sf has values in SM_n .

There is a formal adjoint S^* which maps SM_n -valued functions on \mathbf{R}^n -valued functions. It is defined by

$$(S^* \varphi)_i = D_j \varphi_{ij},$$

and it satisfies

$$(1) \quad \int_{\Omega} Sf \cdot \varphi dx = - \int_{\Omega} f \cdot S^* \varphi dx$$

when either f or φ has compact support. ($Sf \cdot \varphi$ and $f \cdot S^* \varphi$ are the dot products $Sf_{ij} \varphi_{ij}$ and $f_i (S^* \varphi)_i$, respectively; dx is the euclidean volume element.)

Equation (1) defines Sf and $S^* \varphi$ as *distributions* even if f and φ are not differentiable. We are always assuming that f is continuous and φ locally integrable.

3. INVARIANCE PROPERTIES

In (1) we prefer to regard φdx as a matrix-valued measure, so that the pairing

$$\langle Sf, \varphi dx \rangle = \int_{\Omega} Sf \cdot \varphi dx$$

is between a function and a measure. Similarly, $S^*(\varphi dx) = (S^* \varphi) dx$ is a vector-valued measure.

Let A be a Möbius transformation. We define the *pull-backs* of vector- and SM_n -valued functions by

$$\begin{aligned}(A^* f)(x) &= (DA)^{-1} f(Ax) \\ (A^* \varphi)(x) &= (DA)^{-1} \varphi(Ax) DA\end{aligned}$$

and for the corresponding measures by

$$\begin{aligned}A^*(f dx) &= |\det A| {}^t D A f(Ax) dx \\ A^*(\varphi dx) &= |\det A| (DA)^{-1} \varphi(Ax) DA.\end{aligned}$$

These definitions are chosen so that the pairings are invariant:

$$\begin{aligned}\langle A^* f, A^* g dx \rangle &= \langle f, g dx \rangle \\ \langle A^* v, A^* \varphi dx \rangle &= \langle v, \varphi dx \rangle.\end{aligned}$$

There is a basic identity

$$(2) \quad S(A^* f)(x) = (DA)^{-1} S f(Ax) DA$$

which may be expressed as a commutativity relation $SA^* = A^* S$, applicable to functions, but not to measures. It implies the relation $S^* A^* = A^* S^*$, which is valid for measures in the sense that

$$(3) \quad S^*(A^* \varphi dx) = A^*(S^* \varphi dx),$$

but not for functions. It should be noted that (2) and (3) are true only because A is conformal.

A function is transformed into a measure by multiplication with a fixed invariant measure ρdx . The invariance means that $A^*(\rho dx) = \rho dx$, or $\rho(Ax) |\det DA| = \rho(x)$; we assume also that A leaves Ω invariant. In these circumstances it makes sense to consider the operator $S^* \rho S$ which takes f to $S^* [\rho(Sf)dx]$ and commutes with $A^* : (S^* \rho S) A^* = A^* (S^* \rho S)$.

There are three classical cases in which Ω is invariant under a transitive group $G(\Omega)$ of Möbius transformations:

- (i) $\Omega = \mathbf{R}^n$. $G(\Omega)$ is the group of euclidean motions, and $\rho = 1$.
- (ii) $\Omega = B(1) = \{x : |x| < 1\}$. $G = G(B)$ is the group of non-euclidean motions, and $\rho = (1 - |x|^2)^{-n}$.
- (iii) Ω is the one-point compactification of \mathbf{R}^n , identified with S^n in \mathbf{R}^{n+1} . The group is formed by the rotations of the sphere, and $\rho = (1 + |x|^2)^{-n}$.