

# Situation générique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

l'image de  $\hat{\pi}$  et du noyau de  $\hat{\eta}_{2p+1}$ , mentionnée précédemment, découle l'égalité de l'image de  $\pi$  et du noyau de  $\eta_{2p+1}$ . En particulier  $\eta_{2p+1}$  est un isomorphisme si et seulement si  $\pi$  est un homomorphisme nul.

### SITUATION GÉNÉRIQUE

Il faut considérer le  $K$ -module  $H_3[I]/J_3$ , autrement dit le  $K$ -module quotient

$$\text{Tor}_3^A(K, K)/\text{Tor}_2^A(K, K) \cdot \text{Tor}_1^A(K, K).$$

Il s'agit là du quotient  $H_2/H_1$ .  $H_1$  en homologie à la Koszul et un élément  $t$  du quotient de  $\text{Tor}_3$  par  $\text{Tor}_2$ .  $\text{Tor}_1$  est donc représentable par un élément  $g$  facile à expliciter à l'aide d'un système minimal de générateurs  $m_1, m_2, \dots, m_n$  de l'idéal maximal  $M$  de l'anneau local  $A$ . Ce représentant  $g$  a la forme

$$\sum \mu_{ij} dm_i \wedge dm_j \quad 1 \leq i < j \leq n$$

avec la condition usuelle de cycle pour  $1 \leq i \leq n$

$$\sum \mu_{ij} m_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

en posant  $\mu_{ii}$  égal à 0 et  $\mu_{ji}$  égal à  $-\mu_{ij}$ . Cela étant, avec un anneau  $B$ , il est naturel de considérer la  $B$ -algèbre  $Bn$  engendrée par les  $n(n+1)/2$  générateurs

$$x_i \text{ avec } 1 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad y_{jk} \text{ avec } 1 \leq j < k \leq n$$

et soumise aux  $n$  relations pour  $1 \leq i \leq n$

$$\sum y_{ij} x_j = 0 \quad 1 \leq j \leq n$$

en posant  $y_{ii}$  égal à 0 et  $y_{ji}$  égal à  $-y_{ij}$ . Mais alors l'élément  $gn$

$$\sum y_{ij} dx_i \wedge dx_j \quad 1 \leq i < j \leq n$$

représente un élément important  $tn$  du quotient

$$\text{Tor}_3^{Bn}(B, B)/\text{Tor}_2^{Bn}(B, B) \cdot \text{Tor}_1^{Bn}(B, B).$$

L'homomorphisme utilisé de  $Bn$  dans  $B$  est l'unique homomorphisme de  $B$ -algèbres qui envoie les générateurs  $x_i$  et  $y_{jk}$  sur 0.

Les  $B$ -algèbres  $Bn$  et  $Zn \otimes_Z B$  sont isomorphes. Considérons une résolution simpliciale  $Pn(Z)$  de la  $Zn$ -algèbre  $Z$ . Comme le  $Z$ -module  $Zn$  est

libre, le produit tensoriel  $P_n(Z) \otimes_Z B$  est une résolution simpliciale  $P_n(B)$  de la  $B_n$ -algèbre  $B$ . Considérons encore les produits tensoriels importants

$$R_n(Z) = P_n(Z) \otimes_{Z_n} Z \text{ et } R_n(B) = P_n(B) \otimes_{B_n} B.$$

Les  $B$ -algèbres simpliciales  $R_n(Z) \otimes_Z B$  et  $R_n(B)$  sont alors isomorphes de manière élémentaire.

Considérons maintenant l'homomorphisme de l'anneau  $Z_n$  dans l'anneau  $A$  qui envoie les générateurs  $x_i$  sur les éléments  $m_i$  et les générateurs  $y_{jk}$  sur les éléments  $\mu_{jk}$ . Par nature, cet homomorphisme est appelé à varier. Au niveau des quotients de  $\text{Tor}_3$  par  $\text{Tor}_2$ .  $\text{Tor}_1$ , l'homomorphisme correspondant envoie l'élément générique  $tn$  sur l'élément quelconque  $t$  donné initialement. L'homomorphisme de  $Z_n$  dans  $A$  donne un homomorphisme de  $R_n(Z)$  dans  $R$ , donc un homomorphisme de  $R_n(K)$  dans  $R$ , par produit tensoriel.

En résumé, on a la  $K$ -algèbre simpliciale  $R$  qui donne lieu au complexe cotangent de la  $A$ -algèbre  $K$ , avec l'homomorphisme  $\pi$  correspondant, et la  $K$ -algèbre simpliciale  $R_n$  qui donne lieu au complexe cotangent de la  $Kn$ -algèbre  $K$ , avec l'homomorphisme  $\pi n$  correspondant. De plus il existe un homomorphisme de  $R_n$  dans  $R$  plaçant finalement  $tn$  au-dessus de  $t$  et  $\pi n$  au-dessus de  $\pi$ . En particulier l'homomorphisme  $\pi$  est nul en entier, si l'homomorphisme  $\pi n$  est nul sur l'élément générique. Il reste à préciser quel est l'élément  $\pi n(tn)$ . On peut localiser  $Kn$  sans rien changer, si on le désire. Enfin dénotons par  $Mn$  le noyau de l'homomorphisme de  $Kn$  sur  $K$ . L'idéal  $Mn$  a  $n(n+1)/2$  générateurs, alors que l'idéal  $M$  a  $n$  générateurs.

### CONCLUSION

Considérons une résolution libre et multiplicative  $\tilde{F}n$  de la  $Kn$ -algèbre  $K$  et dénotons par  $F_n$  le produit tensoriel  $\tilde{F}n \otimes_{Kn} K$  qui permet le calcul de  $\text{Tor}^{Kn}(K, K)$ . Dans la définition de l'homomorphisme  $\pi n$ , on peut remplacer les  $K$ -algèbres simpliciales  $R_n$  et  $\tilde{R}n$  par les  $K$ -algèbres différentielles  $F_n$  et  $\tilde{F}n$ . L'élément  $gn$  appartient alors à  $\tilde{F}n \otimes_{Kn} Mn$  et représente un élément de l'espace vectoriel

$$\text{Tor}_2^{Kn}(K, Mn) \cong \text{Tor}_3^{Kn}(K, K).$$