l'image de $\hat{\pi}$ et du noyau de $\hat{\eta}_{2p+1}$, mentionnée précédemment, découle l'égalité de l'image de π et du noyau de η_{2p+1}. En particulier η_{2p+1} est un isomorphisme si et seulement si π est un homomorphisme nul.

Situation générique

Il faut considérer le K-module $H_3\,[I]/J_3$, autrement dit le K-module quotient

$$\mathrm{Tor}_3^A(K, K)/\mathrm{Tor}_2^A(K, K)\,.\,\mathrm{Tor}_1^A(K, K)\,.$$

Il s'agit là du quotient H_2/H_1. H_1 en homologie à la Koszul et un élément t du quotient de Tor_3 par Tor_2. Tor_1 est donc représentable par un élément g facile à expliciter à l'aide d'un système minimal de générateurs $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de l'idéal maximal M de l'anneau local A. Ce représentant g a la forme

$$\Sigma \mu_{ij}\, dm_i \Lambda\, dm_j \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

avec la condition usuelle de cycle pour $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\Sigma \mu_{ij}\, m_j = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

en posant μ_{ii} égal à 0 et μ_{ji} égal à $-\mu_{ij}$. Cela étant, avec un anneau B, il est naturel de considérer la B-algèbre Bn engendrée par les $n(n+1)/2$ générateurs

$$x_i \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{et} \quad y_{jk} \text{ avec } 1 \leqslant j < k \leqslant n$$

et soumise aux n relations pour $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\Sigma\, y_{ij}\, x_j = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

en posant y_{ii} égal à 0 et y_{ji} égal à $-y_{ij}$. Mais alors l'élément gn

$$\Sigma y_{ij}\, dx_i \Lambda\, dx_j \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

représente un élément important tn du quotient

$$\mathrm{Tor}_3^{Bn}(B, B)/\mathrm{Tor}_2^{Bn}(B, B)\,.\,\mathrm{Tor}_1^{Bn}(B, B)\,.$$

L'homomorphisme utilisé de Bn dans B est l'unique homomorphisme de B-algèbres qui envoie les générateurs x_i et y_{jk} sur 0.

Les B-algèbres Bn et $Zn \otimes_Z B$ sont isomorphes. Considérons une résolution simpliciale $Pn\,(Z)$ de la Zn-algèbre Z. Comme le Z-module Zn est libre, le produit tensoriel $Pn(Z) \otimes_Z B$ est une résolution simpliciale $Pn(B)$ de la Bn-algèbre B. Considérons encore les produits tensoriels importants

$$Rn(Z) = Pn(Z) \otimes_{Zn} Z \quad \text{et} \quad Rn(B) = Pn(B) \otimes_{Bn} B\,.$$

Les B-algèbres simpliciales $Rn(Z) \otimes_Z B$ et $Rn(B)$ sont alors isomorphes de manière élémentaire.

Considérons maintenant l'homomorphisme de l'anneau Zn dans l'anneau A qui envoie les générateurs x_i sur les éléments m_i et les générateurs y_{jk} sur les éléments μ_{jk}. Par nature, cet homomorphisme est appelé à varier. Au niveau des quotients de Tor_3 par $\mathrm{Tor}_2 . \mathrm{Tor}_1$, l'homomorphisme correspondant envoie l'élément générique tn sur l'élément quelconque t donné initialement. L'homomorphisme de Zn dans A donne un homomorphisme de $Rn(Z)$ dans R, donc un homomorphisme de $Rn(K)$ dans R, par produit tensoriel.

En résumé, on a la K-algèbre simpliciale R qui donne lieu au complexe cotangent de la A-algèbre K, avec l'homomorphisme π correspondant, et la K-algèbre simpliciale Rn qui donne lieu au complexe cotangent de la Kn-algèbre K, avec l'homomorphisme πn correspondant. De plus il existe un homomorphisme de Rn dans R plaçant finalement tn au-dessus de t et πn au-dessus de π. En particulier l'homomorphisme π est nul en entier, si l'homomorphisme πn est nul sur l'élément générique. Il reste à préciser quel est l'élément $\pi n(tn)$. On peut localiser Kn sans rien changer, si on le désire. Enfin dénotons par Mn le noyau de l'homomorphisme de Kn sur K. L'idéal Mn a $n(n+1)/2$ générateurs, alors que l'idéal M a n générateurs.

Conclusion

Considérons une résolution libre et multiplicative $\widetilde{Fn}$ de la Kn-algèbre K et dénotons par Fn le produit tensoriel $\widetilde{Fn} \otimes_{Kn} K$ qui permet le calcul de $\mathrm{Tor}^{Kn}(K, K)$. Dans la définition de l'homomorphisme πn, on peut remplacer les K-algèbres simpliciales Rn et $\widetilde{Rn}$ par les K-algèbres différentielles Fn et $\widetilde{Fn}$. L'élément gn appartient alors à $\widetilde{Fn} \otimes_{Kn} Mn$ et représente un élément de l'espace vectoriel

$$\mathrm{Tor}_2^{Kn}(K, Mn) \cong \mathrm{Tor}_3^{Kn}(K, K)\,.$$