GÉNÉRALISATION DES SUITES SPECTRALES

par Costake TELEMAN et TA MAN

Le but de ce travail est de généraliser les suites exactes de Gysin et de Wang en utilisant le formalisme développé par l'un des auteurs dans [3].

1. Rappelons quelques définitions et résultats donnés dans [3]. Dans ce travail, une *paire* sera toujours une paire de groupes, formée par un groupe arbitraire et par un sous-groupe de celui-ci. Une paire (G, G_*) sera nommée *triviale* si $G_* = G$. A chaque paire (G, G_*) on associe l'ensemble G/G_* des classes $g\,G_*, g \in G$, et nous considérerons la classe G_* comme *point base* de G/G_*. Un morphisme de paires $f\colon (G, G_*) \to (G', G'_*)$ est un homomorphisme de G dans G' qui envoie G_* dans G'_*. *Le noyeau, l'image* et *la coimage* sont définis par les formules

$$\ker f = (f^{-1}G'_*\,, G_*)\,,\ \ \operatorname{im} f = (f\,G, f\,G \cap G'_*)\,,\quad \operatorname{coim} f = (G, f^{-1}G'_*)\,.$$

Le morphisme f définit une application d'espaces à points base

$$\bar{f}\colon\quad G/G_* \to G'/G'_*\,.$$

Cette application possède la propriété importante suivante: Toutes les fibres de $\bar{f}$ sont équivalentes à l'ensemble $f^{-1}\,G'_*/G_*$.

Si deux sous-groupes A, B d'un groupe G sont tels que l'ensemble $A\,.\,B$ des produits $x\,.\,y$ avec $x \in A$ et $y \in B$ est un sous-groupe de G, nous dirons que A, B sont *quasi-permutables.*

Un *q-morphisme* est un morphisme de paires $f\colon (G, G_*) \to (G', G'_*)$ ayant la propriété: fG est quasi-permutable avec G'_*. Le conoyeau d'un q-morphisme f est la paire

$$\operatorname{coker} f = (G', f\,G\,.\,G'_*)\,.$$

L'application $\bar{f}$ induite par un morphisme f est injective si et seulement si $\ker f$ est une paire triviale. L'application $\bar{f}$ sera surjective si et seulement si f est un q-morphisme et si $\operatorname{coker} f$ est une paire triviale.

Les paires triviales seront désignées par 1.

Une suite de deux morphismes

$$(1) \qquad (G, G_*) \xrightarrow{f} (G', G'_*) \xrightarrow{g} (G'', G''_*)$$

sera nommée *semi-exacte* si $g \circ f$ est un morphisme trivial, donc si $fG \subset g^{-1} G''_*$. L'inclusion $fG \subset g^{-1} G''_*$ induit un morphisme i: $\operatorname{im} f \to \ker g$. Le morphisme i est une équivalence si et seulement si $fG \,.\, G'_* = g^{-1} G''_*$. Dans le cas où cette dernière condition est remplie, nous dirons que la suite (1) est *exacte*. La suite (1) sera exacte si et seulement si la suite

$$G/G_* \xrightarrow{\bar{f}} G'/G'_* \xrightarrow{\bar{g}} G''/G''_*$$

est exacte dans la catégorie des ensembles à points base.

Pour tout q-morphisme f on peut écrire la suite exacte

$$1 \longrightarrow \ker f \longrightarrow (G, G_*) \xrightarrow{f} (G', G'_*) \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow 1\,.$$

Un complexe de paires est une suite semi-exacte de q-morphismes

$$(2) \qquad \ldots \longrightarrow (G^i, G^i_*) \xrightarrow{d^i} (G^{i+1}, G^{i+1}_*) \longrightarrow \ldots$$

Exemple. Soit

$$\ldots \longrightarrow G^i \xrightarrow{h^i} G^{i+1} \longrightarrow \ldots$$

une suite arbitraire d'homomorphismes de groupes. Soit G^i_* le sous-groupe de G^i engendré par les éléments de la forme $x\,y\,x^{-1}$, où $x \in \operatorname{im} h^{i-1}$ et $y \in \operatorname{im}(h^{i-1} \circ h^{i-2})$. Le système $\{G^i, G^i_*, h^i\}$ est un complexe de paires.

Les *paires dérivées* et les *ensembles de cohomologie* du complexe (2) sont définies par les formules

$$\mathscr{H}^i(K) = \left((d^i)^{-1} G^{i+1}_*\,,\ (d^{i-1} G^{i-1}) \,.\, G^i_*\right),$$

$$H^i(K) = (d^i)^{-1} G^{i+1}_* / (d^{i-1} G^{i-1}) \,.\, G^i_*\,.$$

Un *complexe filtré* est un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & (G_p^i, G^i) \arrow[r, "d_p^i"] \arrow[u] & (G_p^{i+1}, G^{i+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & (G_{p+1}^i, G^i) \arrow[r, "d_{p+1}^i"] \arrow[u] & (G_{p+1}^{i+1}, G^{i+1}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

tel que les flèches verticales sont des morphismes induits par des inclusions, les lignes sont des complexes de paires et dans lequel, pour chaque couple (p, i), l'un au moins des groupes G_{p+1}^i, $\operatorname{im} d_p^{i-1}$ est un sous-groupe invariant de G_p^i.

Exemple. Considérons un diagramme commutatif du type suivant

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & & & & & & \\
X_p \arrow[dr, "\alpha_p"] \arrow[dd, "l_p"'] & & \cdots \arrow[r] & X^i \arrow[r, "h^i"] \arrow[dd, bend left=70, "\mu^i"] & X^{i-1} \arrow[r] & X^{i-2} \arrow[r] & \cdots \\
 & X \arrow[urr, bend left, "\alpha^i"] \arrow[drr, bend right, "\beta^i"'] & & & & & \\
X_{p+1} \arrow[ur] \arrow[d] & & \cdots \arrow[r] & Y^i \arrow[r, "k^i"] \arrow[uu, "\lambda^i"] & Y^{i-1} \arrow[r] \arrow[uu] & Y^{i-2} \arrow[r] \arrow[uu] & \cdots \\
\vdots & & & & & &
\end{tikzcd}$$

où les termes sont des espaces topologiques et des applications continues. Si G est un groupe topologique, nous désignerons par G^X le groupe des applications continues de X dans G, avec la multiplication donnée par la formule $(ff')(x) = f(x) . f'(x)$, où $x \in X$ et $f, f' \in G^X$. Si $f\colon X \to Y$ est une application continue, G^f désignera l'homomorphisme de G^Y dans G^X défini par la formule $G^f(h) = h \circ f$.

Considérons les groupes

$$H_p^i = \operatorname{im} G^{\alpha^i} \cap \ker G^{\alpha_p}, \quad K^i = \operatorname{im} G^{(\mu^i \circ \alpha^i)}$$

et soit K^i_* le sous-groupe invariant de $G^i = \operatorname{im} G^{\alpha^i}$ engendré par K^i. Les groupes $G^i_p = H^i_p . K^i_*, K^i_*$ et les homomorphismes $d^i_p = G^{h^i} \mid G^i_p$ forment un complexe filtré de paires.

Etant donné un complexe filtré de paires, on peut former les groupes

$$Z^{p,q}_r = \{ x \in G^{p+q}_p ; \quad dx \in G^{p+q+1}_{p+r} \}; \quad B^{p,q}_r = G^{p+q}_p \cap dG^{p+q-1}_{p-r}$$
$$= dZ^{p-r,q+r-1}_r,$$

les paires

$$\mathscr{E}^{p,q}_r = (Z^{p,q}_r, \; Z^{p+1,q-1}_{r-1} . B^{p,q}_{r-1}),$$

ainsi que les ensembles

$$E^{p,q}_r = Z^{p,q}_r / (Z^{p+1,q-1}_{r-1} . B^{p,q}_{r-1}) .$$

Les morphismes d^i_p induisent des morphismes

$$d^{p,q}_r : \quad \mathscr{E}^{p,q}_r \to \mathscr{E}^{p+r,q-r+1}_r$$

et les compositions $d^{p+r,q-r+1}_r \circ d^{p,q}_r$ sont des morphismes triviaux.

On a des équivalences canoniques

$$\mathscr{E}^{p,q}_{r+1} \to \mathscr{H}^{p,q}(\mathscr{E}_r) .$$

Dans la suite, nous supposerons que chaque groupe G^i_p est un sous-groupe invariant de G^i_{p-1}.

Introduisons les groupes

$$G^i = \cup_p G^i_p, \; Z^{p,q}_\infty = \{x \in G^{p+q}_p ; \, dx \in G^{p+q+1}\}, \; B^{p,q}_\infty = G^{p+q}_p \cap dG^{p+q-1}$$

et les paires $\mathscr{E}^{p,q}_\infty = (Z^{p,q}_\infty, Z^{p+1,q-1}_\infty . B^{p,q}_\infty)$. Soient $E^{p,q}_\infty$ les ensembles associés à ces dernières paires.

Un complexe filtré de paires est nommé *régulier* dans le cas où, pour chaque indice i, il existe un entier $n(i)$ tel que $G^i_{n(i)+1} = G^i_*$. Nous aurons les relations $\cap_p G^i_p = G^i_*$.

Considérons les complexes $K_p = \{G^i_p, G^i_*, d^i_p\}$, $K = \{G^i, G^i_*, d^i\}$, où $d^i \mid G^i_p = d^i_p$. Les inclusions $G^i_p \subset G^i$, $G^i_{p+1} \subset G^i_p$ induisent des morphismes de complexes $j_p : K_p \to K$, $i_p : \operatorname{im} j_{p+1} \to \operatorname{im} j_p$; ils existent aussi des morphismes de paires

$$\mathscr{H}^i(j_p) : \mathscr{H}^i(K_p) \to \mathscr{H}^i(K)$$
$$h^i_p : im\, \mathscr{H}^i(j_{p+1}) \to im\, \mathscr{H}^i(j_p) .$$

On a les formules

$$\mathscr{H}^i(K)_p = im\, \mathscr{H}^i(j_p) = (Z^{p,i-p}_\infty, G^i_* . B^{p,i-p}_\infty)$$
$$\operatorname{coker} h^i_p = (Z^{p,i-p}_\infty, Z^{p+1,i-p-1}_\infty . B^{p,i-p}_\infty) = \mathscr{E}^{p,i-p}_\infty .$$

Il en résulte qu'une relation de la forme $\mathscr{E}_{\infty}^{p,q} = 1$ a pour conséquence l'existence d'une équivalence $\mathscr{H}^{i}(K)_{p+1} \rightarrow \mathscr{H}^{i}(K)_{p}$ et qu'une relation du type $\mathscr{H}^{p+q}(K)_{p+1} = 1$ entraîne l'égalité $\mathscr{H}^{p+q}(K)_{p} = \mathscr{E}_{\infty}^{p,q}$.

2. THÉORÈME 1. Supposons qu'un complexe filtré de paires est régulier et qu'il existe pour ce complexe des entiers $r > 1$, Q tels qu'on ait $E_{r}^{p,q} = 1$ chaque fois que $q \neq Q$. Dans ces hypothèses, on a des équivalences canoniques

$$H^{n}(K) \approx E_{r}^{n-Q,Q}.$$

Démonstration. Les hypothèses faites entraînent les relations $E_{s}^{p,q} = 1$ pour $s \geqslant r$ et $q \neq Q$ et $d_{s}^{p,q} = 1$ pour $s \geqslant r$. Il en résulte que $E_{\infty}^{p,q}$ est un ensemble canoniquement équivalent à $E_{r}^{p,q}$. Les remarques faites précédemment montrent qu'on a $H^{n}(K) \approx H^{n}(K)_{n-Q} \approx E_{\infty}^{n-Q,Q}$.

THÉORÈME 2. Soit K un complexe filtré régulier de paires tel qu'il existent des entiers $n \geqslant r \geqslant 2$ tels qu'on ait $E_{r}^{p,q} = 1$ pour $q \neq 0, n$. Dans ce cas, on a *la suite exacte de Gysin généralisée*

$$\ldots \longrightarrow E_{r}^{i,o} \longrightarrow H^{i}(K) \longrightarrow E_{r}^{i-n,n} \longrightarrow E_{r}^{i+1,o} \longrightarrow H^{i+1}(K) \longrightarrow \ldots$$

Démonstration. Le complexe K étant régulier, on a $E_{\infty}^{p,q} = 1$ pour $q \neq 0, n$ et, quelque soit l'indice i, on a la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathscr{E}_{\infty}^{i,o} \longrightarrow \mathscr{H}^{i}(K)_{i-n} \longrightarrow \mathscr{E}_{\infty}^{i-n,n} \longrightarrow 1$$

et une équivalence canonique $\mathscr{H}^{i}(K)_{i-n} \tilde{\rightarrow} \mathscr{H}^{i}(K)$; la suite exacte induit une suite exacte d'ensembles à points base

$$1 \longrightarrow E_{\infty}^{i,o} \longrightarrow H^{i}(K)_{i-n} \longrightarrow E_{\infty}^{i-n,n} \longrightarrow 1.$$

Les seules différentielles $d_{s}^{p,q}$ qui ne sont pas triviales sont celles pour lesquelles $s = n + 1$. Pour $s \neq n$ on aura des équivalences $E_{s+2}^{p,q} \approx E_{s+1}^{p,q}$. Pour $s = n + 1$, les seules différentielles non triviales sont

$$d_{n+1}^{i-n,n} : \mathscr{E}_{n+1}^{i-n,n} \longrightarrow \mathscr{E}_{n+1}^{i+1,o}$$

et on a la suite exacte de paires

$$1 \longrightarrow \mathscr{H}^{i-n,n}(\mathscr{E}_{n+1}) \longrightarrow \mathscr{E}_{n+1}^{i-n,n} \longrightarrow \mathscr{E}_{n+1}^{i+1,o} \longrightarrow \mathscr{H}^{i+1}(\mathscr{E}_{n+1}) \longrightarrow 1$$

qui induit une suite exacte d'ensembles à points base

$$1 \longrightarrow E_{n+2}^{i-n,n} \longrightarrow E_{n+1}^{i-n,n} \longrightarrow E_{n+1}^{i+1,o} \longrightarrow E_{n+2}^{i+1,o} \longrightarrow 1.$$

En combinant les relations obtenues, on trouve facilement la suite exacte indiquée dans l'énoncé.

D'une manière tout à fait analogue, en utilisant les différentielles

$$d_n^{o,i} : \mathscr{E}_n^{o,i} \longrightarrow \mathscr{E}_n^{n,i+1-n},$$

on démontre le théorème suivant, qui fournit une généralisation de la suite exacte de Wang:

THÉORÈME 3. Soit K un complexe filtré régulier de paires, tel qu'il existe des entiers $n \geqslant r \geqslant 1$ avec la propriété $E_r^{p,q} = 1$ pour $p \neq 0, n$. Dans ces conditions, on a une suite exacte d'ensembles à points base du type suivant

$$\ldots \longrightarrow E_r^{n,i-n} \longrightarrow H^i(K) \longrightarrow E_r^{o,i} \longrightarrow E_r^{n,i+1-n} \longrightarrow$$
$$H^{i+1}(K) \longrightarrow \ldots .$$

REFÉRENCES

GODEMENT, R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Herman, Paris, 1958.

SPANIER, E. H. *Algebraic topology.* McGraw-Hill Book Co., 1966.

TELEMAN, C. et TELEMAN M., *Elemente de teoria grupurilor cu aplicaţii în topologie şi fizica.* Ed. Stiinţifica, Bucuresti, 1973.

(Reçu le 7 octobre 1976)

Costake Teleman

Université de Bucarest
Faculté des Mathématiques

Ta Man

Université de Bucarest
Faculté des Mathématiques