

§3. Theorem on superpositions of smooth functions

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **18.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§ 3. Theorem on superpositions of smooth functions

We will denote by $C_s(\mathcal{J}^n)$ the space of n times differentiable functions of n variables defined on the cube $\mathcal{J}^n$ with the norm

$$\|f\| = \sum_{p=1}^s \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=p} \max_{x \in \mathcal{J}^n} \left| \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right|$$

THEOREM 2.3.1. *Let the numbers $s \geq 1$, $s' \geq 1$ and natural n and n' be such that $\frac{n}{s} > \frac{n'}{s'}$. Then the set of functions from $C_s(\mathcal{J}^n)$ not representable on $\mathcal{J}^n$ by superpositions of s' times differentiable functions of n' variables is a set of second category.*

The space $C_s(\mathcal{J}^n)$ is complete and consequently the set mentioned in the theorem is not empty. The theorem is true for any $s \geq 1$, $s' \geq 1$ but we will assume for simplicity that s and s' are integers.

LEMMA 2.3.1. *Let f and f' be q -fold superpositions composed of the functions $\{\varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}^p\}$ and $\{\tilde{\varphi}_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}^p\}$ where all functions composing the superpositions satisfy the condition $\text{Lip } 1$ with the constant L and for any collection $p, \alpha_1, \dots, \alpha_p$*

$$\max \left| \varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}^p - \tilde{\varphi}_{\alpha_1, \dots, \alpha_p}^p \right| \leq \varepsilon$$

Then

$$\max_{x \in \mathcal{J}^n} \left| f(x) - \tilde{f}(x) \right| \leq (L+1)^q \varepsilon$$

The lemma can easily be proved by induction in q .

LEMMA 2.3.2. *Let Ω be an open subset of $C_s(\mathcal{J}^n)$ and $\Omega^* \subset C(\mathcal{J}^n)$. If every $f \in \Omega$ allows uniform approximations on $\mathcal{J}^n$ with any accuracy by functions from Ω^* , i.e. the closure of Ω^* contains Ω , then $H_\varepsilon(\Omega^*) \geq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n/s}$, where $C > 0$ is independent of ε .*

The lemma is easily reduced to lemma 2.2.1 and lemma 2.2.2.

We denote by Ω_k the set of all functions of $C(\mathcal{J}^n)$ which are k -fold superpositions composed of s' times differentiable functions of n' variables with partial derivatives bounded by the same constant k .

LEMMA 2.3.3. If $\frac{n}{s} > \frac{n'}{s'}$ then for any natural k the set $\Omega_k \cap C_s(\mathcal{J}^n)$ is nowhere dense in $C_s(\mathcal{J}^n)$.

By lemma 2.3.1 and the theorem 2.2.1 for any natural k $H_\varepsilon(\Omega_k) \leq C \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n'/s'}$, where C does not depend on ε . Hence, it follows from the inequality $\frac{n}{s} > \frac{n'}{s'}$ and lemma 2.3.2 that the set $\Omega_k \cap C_s(\mathcal{J}^n)$ is nowhere dense in $C_s(\mathcal{J}^n)$.

Now to prove the theorem we have to notice only that the set of functions from $C_s(\mathcal{J}^n)$ representable by superpositions coincides with $\bigcup_{k=1}^{\infty} (\Omega_k \cap C_s(\mathcal{J}^n))$. By lemma 2.3.3 the sets $\{\Omega_k \cap C_s(\mathcal{J}^n)\}$ are nowhere dense and consequently the set of not representable functions is a set of second category.

CHAPTER 3. — SUPERPOSITIONS OF CONTINUOUS FUNCTIONS

In this chapter we present the proof of the theorem of Kolmogorov given by Kahane [36]. This proof which is based on Baire's theory contains a minimum of concrete constructions and shows that there exists a wide choice of inner functions for Kolmogorov's formula.

§ 1. *Certain improvements of Kolmogorov's theorem*

By the theorem of Kolmogorov any function defined and continuous on the cube $\mathcal{J}^n$ can be represented as

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} g_q \left(\sum_{p=1}^n \varphi_{p,q}(x_p) \right),$$

where $\{\varphi_{p,q}\}$ are specially chosen continuous and monotonic functions which do not depend on f , and where $\{g_q\}$ are continuous functions.

Lorentz [12] has noticed that in the theorem of Kolmogorov the functions $\{g_q\}$ can be chosen independently of q . In fact, by adding constants to the functions $t_q = \sum_{p=1}^n \varphi_{p,q}(x_p)$ ($q = 1, \dots, 2n+1$) one can make the ranges