

# 3. Preliminaries

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

### 3. PRELIMINARIES

Since in this paper we are concerned for the most part with square-integrable kernels  $K(x, y)$ , and the Lebesgue integral is employed throughout, equalities and inequalities between functions, therefore, are generally to be understood as holding “almost everywhere” (a.e.).

For convenience we take  $a = 0, b = \pi$ , which we may do without any loss of generality, and consider the class of  $L^2$  kernels  $K(x, y)$  with  $0 \leq x, y \leq \pi$ . In our later work we will need to direct our attention primarily to one of the two variables  $x, y$ . Let us choose this to be the first and extend  $K$  to be periodic in this variable. There are many ways, of course, to accomplish this task, but a not unreasonable procedure is to first define

$$(3.1) \quad K^{(r)}(x, y) \equiv \frac{\partial^r K(x, y)}{\partial x^r} \quad (r = 0, 1, \dots, s)$$

for some preselected nonnegative integer  $s$ , and then assume that  $K(x, y)$  is extended, as an even function of  $x$  if  $s$  is even, and as an odd function of  $x$  if  $s$  is odd, into the domain  $-\pi \leq x \leq 0$ , and thence as a periodic function of  $x$  with period  $2\pi$ . This approach ensures that, under suitable restrictions, the classical Fourier series for  $K^{(s)}(x, y)$ , viewed as a function of its first variable, consists solely of sine terms.

In order to enhance the character of the analogies in which we are interested, we shall say that  $K^{(s)}(x, y)$  is in  $\text{Lip } \alpha$  if

$$|K^{(s)}(x+h, y) - K^{(s)}(x-h, y)| < |h|^\alpha A(y) \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

where  $A(y)$  is nonnegative and square-integrable. More generally, for  $p \geq 1$ ,  $K^{(s)}(x, y)$  will be said to be in  $\text{Lip}(\alpha, p)$  if

$$\int_0^\pi |K^{(s)}(x+h, y) - K^{(s)}(x-h, y)|^p dx < |h|^{\alpha p} A^p(y) \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

with  $L^2 A \geq 0$ . In similar fashion,  $K^{(s)}(x, y)$  will be said to be relatively uniformly of bounded variation if for all  $N \geq 1$  and arbitrary choice of partition  $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N \leq \pi$ ,

$$\sum_{n=1}^N |K^{(s)}(x_n, y) - K^{(s)}(x_{n-1}, y)| < B(y)$$

where  $L^2 B \geq 0$ . The comparable definitions appropriate whenever the roles of  $x$  and  $y$  are reversed should be obvious.

Two-variable kernels behave very much like their one-variable analogues as regards integrated Lipschitz conditions. Indeed, the following can be easily established:

PROPERTY 4. Kernels in  $\text{Lip}(\alpha, p)$  also belong to  $\text{Lip}(\alpha, q)$  for all  $1 \leq q < p$ . Kernels in  $\text{Lip} \alpha$  are automatically in  $\text{Lip}(\alpha, p)$  for all  $p \geq 1$ .

PROPERTY 5. Kernels which are relatively uniformly of bounded variation belong to  $\text{Lip}(1, 1)$ .

PROPERTY 6. If  $K(x, y)$  is absolutely continuous in  $x$ , for almost all  $y$ , and

$$\int_0^\pi \left[ \int_0^\pi |K^{(1)}(x, y)|^p dx \right]^{2/p} dy < \infty,$$

$p > 1$ , then  $K(x, y)$  is in  $\text{Lip}(1, p)$ .

PROPERTY 7. If a kernel belongs both to  $\text{Lip}(\alpha, p)$  and to  $\text{Lip}(\beta, q)$  with  $1 \leq p < q$ , then it belongs to  $\text{Lip}(\gamma, r)$  for all  $p \leq r \leq q$ , where

$$\gamma = \alpha \frac{p(q-r)}{r(q-p)} + \beta \frac{q(r-p)}{r(q-p)}.$$

A somewhat deeper result is

PROPERTY 8. Whenever  $1 \leq p \leq q$ ,  $pq(\alpha - \beta) \geq q - p$ , kernels in  $\text{Lip}(\alpha, p)$  are automatically also in  $\text{Lip}(\beta, q)$ .

#### 4. GROWTH ESTIMATES FOR SINGULAR VALUES

We come now to the main thrust of our narrative. The characteristic values associated with a given  $L^2$  kernel  $K(x, y)$ ,  $0 \leq x, y \leq \pi$ , are those special values of  $\lambda$  for which there exist nontrivial solutions of the homogeneous Fredholm integral equation

$$\phi(x) = \lambda \int_0^\pi K(x, y) \phi(y) dy.$$

The singular values are those positive values  $\mu$  for which there exist nontrivial  $\phi(x)$ ,  $\Psi(x)$  satisfying the coupled equations