4. Groupes d'isotropie

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

ment triviale. Donc f est C^∞-équivalente aux applications qui lui sont proches. L'affirmation que f et g sont C^∞-équivalentes suit du fait que les applications de type I forment un ouvert de Zariski, donc connexe, de $P\mathbf{C}^{17}$.

4. Groupes d'isotropie

Soit $f\colon P\mathbf{C}^2 \to P\mathbf{C}^2$. On pose $G_f = \{(h, H) \in \mathrm{Aut}\,(P\mathbf{C}^2) \times \mathrm{Aut}\,(P\mathbf{C}^2) \mid H\,.\,f\,.\,h^{-1} = f\}$. On va déterminer G_f lorsque f est de degré deux; sauf si f est de type deux, il se trouve que si h est un automorphisme qui laisse invariantes les singularités de f, il existe un unique H tel que $(h, H) \in G_f$.

4.1. Proposition. I) *Si* $t \neq -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$, *le groupe d'isotrophie de* f_t^I *est engendré par les paires*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^{-1} \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^{-2} \\ 0 & u^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & v & 0 \\ v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & v^2 & 0 \\ v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & u^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ u & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & u^{-2} \\ 0 & 1 & 0 \\ u^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où u *et* v *sont les solutions de* $u^3 = t$ *et* $v^3 = 1$. *En fait, la troisième paire s'écrit comme composition des deux premières. Ce groupe est d'ordre* 18.

Si $t = -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$, *on peut ajouter la paire* (h, H), *où* h *est l'automorphisme qui s'écrit, dans les coordonnées introduites sous* 2.6., $(z_0, z_1, z_2) \to (z_0, i.z_1, z_2)$, *et* H *est construit selon le corollaire* 2.5. *appliqué à* $f_t\,.\,h^{-1}$ *et* f_t *afin que* $H\,.\,f_t\,.\,h^{-1} = f_t$. *Le groupe d'isotropie est ici d'ordre* 36.

II) *Le groupe d'isotropie de* f^{II} *est engendré par :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v^2 & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $v^3 = 1$. *Il est d'ordre 6.*

III) *Le groupe d'isotropie de* f^{III} *est engendré par*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^4 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où x *est un nombre complexe non nul.*

IV) *Le groupe d'isotropie de* f^{IV} *est engendré par*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & y^2 \end{pmatrix} \quad et \quad (A_s, A_s),$$

où x *et* y *sont des nombres complexes non nuls et* $A_s(z_0, z_1, z_2) = (z_{s(0)}, z_{s(1)}, z_{s(2)})$, *où* s *parcourt les permutations de* $(0, 1, 2)$.

Démonstration: On vérifie que les automorphismes décrits laissent invariantes les applications en question.

I) Si $t \neq -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$ et $t \neq -4$, il ne peut y avoir d'autres automorphismes laissant f_t^I invariante, puisque la projection du groupe décrit sur le premier facteur de $\operatorname{Aut}(PC^2) \times \operatorname{Aut}(PC^2)$ donne tous les automorphismes qui laissent $\sum (f_t^I)$ invariante (voir remarque 2.7). Si $t = -4$, on a des automorphismes supplémentaires, mais ils ne laissent pas $\sum^{1,1} (f_t^I)$ invariant et ne donnent donc rien de nouveau.

Si $t = -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$ par contre, l'automorphisme qui échange q_1 et q_2 (notations de 2.7) laisse $p \in \sum^{1,1} (f_t^I)$ fixe et donne lieu, ainsi qu'on l'a énoncé, à un nouvel élément de $G_{f_t^I}$.

Pour II, III et IV les affirmations se vérifient facilement.

4.2. Théorème. *Soit* $f : PC^2 \to PC^2$ *une application de degré deux. Si* f *est de type I, elle est* C^∞*-stable. Si elle est de type III ou IV, elle est stable dans les applications* G_f*-équivariantes.*
Si elle est de type II, *elle n'est pas* G_f*-stable.*

Démonstration: Les applications de type I forment un ouvert; leur C^∞-stabilité suit alors de 3.3.

Si f est de type III, son groupe d'isotropie est de dimension un et son lieu singulier est la réunion de trois droites d_0, d_1 et d_2. Si g est G_f équivariante, son groupe d'isotropie est de dimension un ou deux. Supposons que $\dim(\ker(df_p)) = 1$, où $p = d_0 \cap d_1$; si g est assez proche de f, $\dim(\ker(dg_q)) \leqslant 1$, pour q dans un voisinage de p, donc g ne peut être de type IV et doit donc être de type III.

Si f est de type IV, son groupe d'isotropie est de dimension deux, de même que pour toute autre application g G_f-équivariante. g doit donc être aussi de type IV.

Si

$$f(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + z_0 . z_1),$$

l'application

$$(z_0^2 + t . z_1 . z_2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + z_0 . z_1),$$

pour t petit, est proche de f et G_f-équivariante, mais de type I, donc non équivalente à f.

BIBLIOGRAPHIE

[1] RONGA, F. Le calcul des classes duales aux singularités de Boardman d'ordre deux. *Commentarii Matematici Helvetici*, *47*, 1 (1972), pp. 15-35.

[2] VAN DER WAERDEN, B.L. *Einführung in die algebraische Geometrie.* Zweite Auflage, Springer Verlag, 1973.

(Reçu le 15 octobre 1975)

Felice Ronga

Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
1211 Genève 24