

3. A Particular Case

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$(3) \quad f_3 - f_2 = tXf_2 + \frac{t^2}{2} X^2 f_2 + O(3)$$

$$(4) \quad f_2 - f_0 = tYf_0 + \frac{t^2}{2} Y^2 f_0 + O(3)$$

Subtracting (3) and (4) from the sum of (1) and (2), and applying Lemma 1 again (up to $O(2)$ only), we obtain

$$f_4 - f_3 = t^2 (XYf - YXf)_0 + \frac{t^3}{2} (X Y^2 f - Y X^2 f)_0 + O(3),$$

or

$$(5) \quad f_4 - f_3 = t^2 [X, Y]_0 f + O(3)$$

The meaning of this is that $[X, Y]$ measures the degree to which the circuit $p_3 \rightarrow p_2 \rightarrow p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow p_4$ fails to be closed. Indeed, if $[X, Y] = 0$, then $p_3 = p_4$ (cf. [1, pp. 134-135]).

If we think of $p = p_3$ as the starting point, and (see figure) define $\sigma(u) = Y_u X_u Y_{-u} X_{-u} p$ (so that $p_4 = \sigma(t)$), we may re-express (5) as

$$f(\sigma(t)) - f(\sigma(0)) = t^2 [X, Y]_0 f + O(3) = t^2 [X, Y]_p f + O(3),$$

since switching to p changes $[X, Y]f$ by an amount which is only of order $O(1)$.

3. A PARTICULAR CASE

As a special case, assume X and Y are left invariant vector fields on a Lie group G , i.e., elements of $L(G)$, the Lie algebra of G ; and take p to be e , the identity element of the group. Since, in this context, $X_t(p) = p \exp(tX)$, for p in G , we have

$$\sigma(t) = \exp(-tX) \exp(-tY) \exp(tX) \exp(tY).$$

If we assume $f(e) = 0$, Theorem 1 yields

$$\begin{aligned} & f(\exp(-tX) \exp(-tY) \exp(tX) \exp(tY)) \\ &= t^2 [X, Y]_e f + O(3) \\ &= f(\exp\{t^2 [X, Y] + O(3)\}) \end{aligned}$$

and so

$$\exp(-tX) \exp(-tY) \exp(tX) \exp(tY) = \exp(t^2 [X, Y] + O(3)).$$

This formula is involved in proving that if H is (algebraically) a subgroup of a Lie group G and if H is a closed subset of G , then H is a topological Lie subgroup of G ([3, pp. 96, 105]). Specifically, it implies that $\{V \text{ in } L(G) \mid \exp(tV) \text{ is in } H, \text{ for all } t \text{ real}\}$ is closed under the bracket. The formula also provides the following geometric interpretation of the bracket $[X, Y]$ on the Lie algebra $L(G)$ of a Lie group G .

COROLLARY 1. If X and Y belong to $L(G)$, then the curve

$$t \rightarrow \exp(-\sqrt{t}X) \exp(-\sqrt{t}Y) \exp(\sqrt{t}X) \exp(\sqrt{t}Y)$$

has velocity vector $[X, Y]$ at $t = 0$.

4. THE CURVATURE TENSOR

Now assume M is furnished with an affine connection (covariant differentiation operator) ∇ .

The *curvature tensor* R on M is the $\binom{1}{3}$ -tensor (equivalently, the linear-transformation-valued bilinear mapping) R defined by

$$\begin{aligned} R(X, Y)A &= \nabla_X \nabla_Y A - \nabla_Y \nabla_X A - \nabla_{[X, Y]} A \\ &= ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}) A, \end{aligned}$$

for X, Y , and A vector fields on M . The relationship between this tensor and the Riemann curvature (in a Riemannian manifold) may be found in [4, pp. 72-73], [2, Chapter 9], and [5, pp. 125-127]. Here we shall show its relationship to parallel translation.

Consider the figure again, and let A be any vector field on M . We shall compare parallel translation along $p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow p_4$ with that along $p_0 \rightarrow p_2 \rightarrow p_3$. Then, by adding the curve $\sigma(u) = Y_u X_u Y_{-u} X_{-u} p_3$ defined previously (the dotted curve in the figure), we obtain a closed circuit. We shall need the following.

LEMMA 2. (Taylor's Theorem for parallel translation). Let X be a vector field defined in a neighborhood of a curve γ , let $T = \gamma'(0)$, and for any t in domain (γ) , let τ_t denote parallel translation along γ to $\gamma(t)$. Then

$$\tau_0 X(\gamma(t)) - X(\gamma(0)) = \sum_{k=1}^n \frac{t^k}{k!} \nabla_T^k X + O(n+1).$$