

§3. DÉFINITION DES OPÉRATIONS D'ADAMS.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **18.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Il est évident que la formule

$$\lambda_m(\alpha + \beta) = \sum_{i=0}^m (\lambda_i \alpha) \cdot (\lambda_{m-i} \beta)$$

ne fait que traduire l'identité

$$\lambda(\alpha + \beta) = (\lambda\alpha) \cdot (\lambda\beta).$$

Remarque. λ_m commute à l'involution $*$: $R(FG) \rightarrow R(FG)$ définie au § 1. Enfin, λ_m commute aux homomorphismes de restriction $f^* : R(FG') \rightarrow R(FG)$ pour $f : G \rightarrow G'$, ainsi qu'aux homomorphismes d'extensions de scalaires.

§ 3. DÉFINITION DES OPÉRATIONS D'ADAMS.

Soient $t_1, \dots, t_N$ des indéterminées. Pour tout entier n tel que $1 \leq n \leq N$, on considère le polynôme symétrique $t_1^n + t_2^n + \dots + t_N^n$ et son expression unique $Q_n^N(s_1, \dots, s_n)$ comme polynôme en les fonctions symétriques élémentaires $s_1, \dots, s_n$ de degré $\leq n$ des indéterminées $t_1, \dots, t_N$. Les fonctions $s_1, \dots, s_k, \dots$ sont définies par l'identité

$$X^N - s_1 X^{N-1} + \dots + (-1)^i s_i X^{N-i} + \dots + (-1)^N s_N = \prod_{v=1}^N (X - t_v)$$

avec les conventions $s_k = 0$ pour $k > N$ et $s_0 = 1$. On observe, en faisant $t_{N'+1} = t_{N'+2} = \dots = t_N = 0$ (où $N' \leq N$), que

$$s_i(t_1, \dots, t_{N'}, 0, \dots, 0) = s_i(t_1, \dots, t_{N'})$$

pour $i \leq N'$.

Exemples.

$$Q_1(s_1) = s_1, \quad Q_2(s_1, s_2) = s_1^2 - 2s_2,$$

$$Q_3(s_1, s_2, s_3) = s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3,$$

$$Q_4(s_1, s_2, s_3, s_4) = s_1^4 - 4s_1^2 s_2 + 2s_2^2 + 4s_1 s_3 - 4s_4,$$

où l'on a écrit Q_i au lieu de Q_i^N pour simplifier l'écriture.

En fait, le polynôme $Q_n^N(s_1, \dots, s_n)$ en tant que polynôme en $s_1, \dots, s_n$ est indépendant de N pourvu que $N \geq n$. Cela résulte d'une identité dont nous aurons encore besoin plus bas, exprimée par le lemme qui suit.

Soient $t'_1, \dots, t'_{N'}$ et $t''_1, \dots, t''_{N''}$ deux suites d'indéterminées et $t_1, \dots, t_N$ leur juxtaposition, i.e. $N = N' + N''$ et $t_i = t'_i$ pour $1 \leq i \leq N'$, $t_{N'+j} = t''_j$ pour $1 \leq j \leq N''$. Soient $s'_1, \dots, s'_{N'}$ et $s''_1, \dots, s''_{N''}$ les fonctions symétriques élémentaires des $t'_1, \dots, t'_{N'}$ et $t''_1, \dots, t''_{N''}$ respectivement. Enfin, soient $s_1, \dots, s_N$ les fonctions symétriques élémentaires des $t_1, \dots, t_N$.

LEMME 1. Avec les notations ci-dessus, on a

$$s_n = \sum_{i=0}^n s'_i \cdot s''_{n-i}.$$

De plus,

$$Q_n^N(s_1, \dots, s_n) = Q_n^{N'}(s'_1, \dots, s'_n) + Q_n^{N''}(s''_1, \dots, s''_n).$$

La première formule résulte immédiatement des identités de définition des s'_i et s''_j en calculant leur produit et en le comparant à l'identité de définition des s_n .

La deuxième identité est une trivialité après avoir remplacé les polynômes Q_n par leur expression en fonction des t .

Il résulte tout d'abord du lemme que $Q_n^N(s_1, \dots, s_n)$ est indépendant de N pour $N \geq n$. En effet, si l'on envoie $t''_1, \dots, t''_{N''}$ sur 0, on obtient $s'_i = s_i$ pour $i = 0, 1, \dots, n$ si $n \leq N'$, comme on l'a observé ci-dessus, et $s''_j = 0$ pour $j > 0$. Donc, $Q_n^N(s_1, \dots, s_n) = Q_n^{N'}(s_1, \dots, s_n)$ pourvu que $N \geq N' \geq n$.

On écrira Q_n pour Q_n^N avec $n \leq N$.

On a aussi

$$\begin{aligned} Q_n - s_1 Q_{n-1} + \dots + (-1)^i s_i Q_{n-i} + \dots \\ + (-1)^{n-1} s_{n-1} Q_1 + (-1)^n n s_n = 0 \end{aligned}$$

en remplaçant successivement X par $t_1, \dots, t_n$ dans l'identité de définition des s_i et en sommant membre à membre. Ceci montre par récurrence sur n que $Q_n(s_1, \dots, s_n)$ est un polynôme à coefficients entiers.

On voit aussi que $Q_n(s_1, 0, \dots, 0) = s_1^n$.

On peut alors définir l'opération d'Adams $\Psi_n, n \in \mathbf{Z}$ sur un FG -module V comme suit.

DÉFINITION. $\Psi_0 V = (\dim V) \cdot 1$,
où 1 est l'élément unité de $R(FG)$;

$$\Psi_n V = Q_n(\lambda_1 V, \lambda_2 V, \dots, \lambda_n V) \text{ pour } n > 0,$$

le membre de droite étant regardé comme un élément de $R(FG)$;

$$\Psi_{-n} V = \Psi_n V^*, \text{ où } n > 0.$$

Pour démontrer que ces formules déterminent une opération $\Psi_n : R(FG) \rightarrow R(FG)$ nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 2. Soient R un anneau commutatif avec élément unité, et $\{\lambda'_i\}, \{\lambda''_i\}$ et $\{\lambda_i\}, i = 0, 1, \dots$ trois suites d'éléments de R telles que $\lambda'_0 = \lambda''_0 = \lambda_0 = 1$, et

$$\lambda_m = \sum_{i=0}^m \lambda'_i \cdot \lambda''_{m-i}$$

pour tout $m \geq 0$. Alors pour tout $n \geq 1$, on a

$$Q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = Q_n(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) + Q_n(\lambda''_1, \dots, \lambda''_n).$$

Ceci résulte immédiatement de l'indépendance algébrique des fonctions symétriques élémentaires. Il existe un homomorphisme

$$h : \mathbf{Z}[s'_1, \dots, s'_N, s''_1, \dots, s''_{N''}] \rightarrow R,$$

tel que $h(s'_i) = \lambda'_i$ et $h(s''_j) = \lambda''_j$. Cet homomorphisme envoie s_m sur λ_m en vertu du lemme 1 et de l'hypothèse

$$\lambda_m = \sum_{i=0}^m \lambda'_i \cdot \lambda''_{m-i}.$$

Il s'ensuit que h envoie $Q_n(s_1, \dots, s_n)$ sur $Q_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et l'assertion résulte de l'identité $Q_n = Q'_n + Q''_n$ du lemme 1.

LEMME 3. Pour tout n entier, l'opération Ψ_n sur les FG -modules induit un endomorphisme de groupe additif

$$\Psi_n : R(FG) \rightarrow R(FG).$$

En outre, pour $n > 0$, on a

$$\Psi_n(\alpha) = Q_n(\lambda_1 \alpha, \dots, \lambda_n \alpha)$$

pour tout $\alpha \in R(FG)$.

Si $0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de FG -modules, le lemme du paragraphe précédent dit que

$$\lambda_m V = \sum_{i=0}^m (\lambda_i V') \cdot (\lambda_{m-i} V'').$$

D'après le lemme 2 ci-dessus appliqué avec

$$\lambda_m = \lambda_m V, \lambda'_i = \lambda_i V', \lambda''_j = \lambda_j V'',$$

on a donc

$$\Psi_n V = \Psi_n V' + \Psi_n V'',$$

pour $n > 0$.

Il en résulte immédiatement que $\Psi_n : R(FG) \rightarrow R(FG)$ est bien définie et additive pour tout entier n .

La formule

$$\Psi_n(\alpha) = Q_n(\lambda_1 \alpha, \dots, \lambda_n \alpha)$$

pour $\alpha \in R(FG)$ quelconque est conséquence de l'additivité de Ψ_n et de celle en α de $Q_n(\lambda_1 \alpha, \dots, \lambda_n \alpha)$.