

10. SUMS OVER INTERVALS OF LENGTH $k/16$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

10. SUMS OVER INTERVALS OF LENGTH $k/16$

Although $S_{16,i}$, $1 \leq i \leq 8$, may be expressed in terms of Dirichlet L -functions at the value 1 by the methods of the previous sections, in each case, L -functions with complex characters arise. Thus, our methods do not enable us to make any conclusions about the sign of $S_{16,i}$, $1 \leq i \leq 8$. However, we are able to prove the following result.

THEOREM 10.1. Let χ be even and put $\chi_{4k} = \chi_4 \chi$ and $\chi_{8k} = \chi_4 \chi_8 \chi$. Then

$$S_{16,1} + S_{16,8} = \frac{G(\chi)}{2\pi} \{ \bar{\chi}(4) L(1, \bar{\chi}_{4k}) + 2^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{8k}) \},$$

$$S_{16,2} + S_{16,7} = \frac{G(\chi)}{2\pi} \{ [2\bar{\chi}(2) - \bar{\chi}(4)] L(1, \bar{\chi}_{4k}) - 2^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{8k}) \},$$

$$S_{16,3} + S_{16,6} = \frac{G(\chi)}{2\pi} \{ - [2\bar{\chi}(2) + \bar{\chi}(4)] L(1, \bar{\chi}_{4k}) + 2^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{8k}) \},$$

and

$$S_{16,4} + S_{16,5} = \frac{G(\chi)}{2\pi} \{ \bar{\chi}(4) L(1, \bar{\chi}_{4k}) - 2^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{8k}) \}.$$

Let χ be odd and put $\chi_{8k} = \chi_8 \chi$. Then

$$S_{16,1} - S_{16,8} = \frac{G(\chi)}{2\pi i} \{ [2\bar{\chi}(2) + \bar{\chi}(4) + \bar{\chi}(8)] [1 - \frac{1}{2} \bar{\chi}(2)] L(1, \bar{\chi}) - 2^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{8k}) \},$$

$$S_{16,2} - S_{16,7} = \frac{G(\chi)}{2\pi i} \{ [\bar{\chi}(4) - \bar{\chi}(8)] [1 - \frac{1}{2} \bar{\chi}(2)] L(1, \bar{\chi}) + 2^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{8k}) \},$$

$$S_{16,3} - S_{16,6} = \frac{G(\chi)}{2\pi i} \{ [\bar{\chi}(8) - \bar{\chi}(4)] [1 - \frac{1}{2} \bar{\chi}(2)] L(1, \bar{\chi}) + 2^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{8k}) \},$$

and

$$S_{16,4} - S_{16,5} = \frac{G(\chi)}{2\pi i} \left\{ [2\bar{\chi}(2) - \bar{\chi}(4) - \bar{\chi}(8)] \left[1 - \frac{1}{2} \overline{\bar{\chi}(2)} \right] L(1, \bar{\chi}) - 2^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{8k}) \right\}.$$

COROLLARY 10.2. If d is odd and positive, then

$$S_{16,1} + S_{16,8} > 0, \quad \text{if } \chi(2) = 1,$$

and

$$S_{16,4} + S_{16,5} > 0, \quad \text{if } \chi(2) = -1.$$

If d is odd and negative, then

$$S_{16,2} - S_{16,7} > 0, \quad \text{if } \chi(2) = 1,$$

$$S_{16,3} - S_{16,6} > 0, \quad \text{if } \chi(2) = 1,$$

$$S_{16,3} - S_{16,6} < 0, \quad \text{if } \chi(2) = -1,$$

and

$$S_{16,4} - S_{16,5} < 0, \quad \text{if } \chi(2) = 1.$$

11. SUMS OVER INTERVALS OF LENGTH $k/24$.

For intervals of length $k/24$, a complete statement of Theorem 11.1 for both even and odd characters would require 24 formulas. Because of limitations of space, we state just 2 of the formulas for $S_{24,i}(\chi)$, where $1 \leq i \leq 12$ and χ is even or odd.

THEOREM 11.1. Let χ be even. Let $\chi_{3k}(n) = \binom{n}{3} \chi(n)$, $\chi_{4k}(n) = \chi_4(n) \chi(n)$, $\chi_{8k}(n) = \chi_4(n) \chi_8(n) \chi(n)$, and $\chi_{24k}(n) = \binom{n}{3} \chi_8(n) \chi(n)$.

Then

$$S_{24,1} = \frac{G(\chi)}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\chi}(2) [1 + \bar{\chi}(3)] L(1, \bar{\chi}_{4k}) + \frac{1}{4} 3^{1/2} \bar{\chi}(4) [1 + \bar{\chi}(2)] L(1, \bar{\chi}_{3k}) + 2^{-1/2} [\bar{\chi}(3) - 1] L(1, \bar{\chi}_{8k}) + (3/2)^{1/2} L(1, \bar{\chi}_{24k}) \right\}.$$