Appendice I

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

APPENDICE I

(1) *Sur l'existence de certaines fonctions dérivables*

LEMME 1. *Il existe une fonction croissante* f *de* $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, *nulle sur* $]-\infty, 0]$, *égale à* 1 *sur* $[1, +\infty[$.

Désignons par g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\begin{cases} g(x) = \exp(-x^{-2}) & \text{si } x > 0 \\ g(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 . \end{cases}$$

Il est clair que g est indéfiniment dérivable. Il suffit alors de poser

$$f(x) = \left(\int_{-\infty}^{x} g(t)\, g(1-t)\, dt\right) \Big/ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, g(1-t)\, dt\right).$$

Ceci a bien un sens puisque $g(t)\, g(1-t)$ est nul si $t \leqslant 0$ ou si $t \geqslant 1$, strictement positif si $0 < t < 1$.

LEMME 2. *Pour tout point* k *de* $\mathbf{Z}^n$ *et tout nombre réel* ε *strictement positif, il existe une fonction* $\alpha_{k,\varepsilon}$ *de* $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, *à valeurs positives, dont le support est contenu dans le cube de côté* 2ε *centré au point* εk *et telle que*

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \alpha_{k,\varepsilon}(x) = 1$$

pour tout point x *de* $\mathbf{R}^n$.

Désignons par f une fonction vérifiant les conditions du lemme 1. On définit une fonction g de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ à valeurs positives en posant

$$g(x) = f(x+1) - f(x).$$

Le support de g est contenu dans l'intervalle $[-1, +1]$ et l'on a

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} g(x-j) = g(x-j_0) + g(x-j_0-1)$$

pour tout point x de $\mathbf{R}$, en désignant par j_0 la partie entière de x (i.e. le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x). On en déduit que l'on a

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} g(x-j) = f(x-j_0+1) = 1 .$$

Il suffit alors de poser

$$\alpha_{k,\varepsilon}(x_1, \dots, x_n) = g\left(\frac{x_1}{\varepsilon} - k_1\right) \dots g\left(\frac{x_n}{\varepsilon} - k_n\right).$$

LEMME 3. *Pour tout ensemble compact* K *de* $\mathbf{R}^n$ *et tout voisinage* U *de* K, *il existe une fonction* α *de* $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ *à valeurs positives, dont le support est contenu dans* U *et égale à* 1 *sur* K.

Munissons $\mathbf{R}^n$ de la norme

$$|(x_1, \dots, x_n)| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Pour tout nombre réel ε strictement positif, l'ensemble

$$K_\varepsilon = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } y \in K \text{ tel que } |x - y| \leqslant \varepsilon \}$$

est compact. Pour ε suffisamment petit, il est contenu dans U. Désignons par A l'ensemble des points k de $\mathbf{Z}^n$ pour lesquels le cube de centre εk et de côté 2ε rencontre K et posons

$$\alpha = \sum_{k \in A} \alpha_{k,\varepsilon}.$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable à valeurs positives. D'autre part, on a

$$\operatorname{supp}(\alpha) \subset \bigcup_{k \in A} \operatorname{supp}(\alpha_{k,\varepsilon}) \subset K_\varepsilon$$

et, pour tout point x de K,

$$\alpha(x) = \sum_{k \in A} \alpha_{k,\varepsilon}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \alpha_{k,\varepsilon}(x) = 1$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 4. *Soit* r *un nombre réel strictement positif et soit* C *le cube de côté* $2r$ *et de centre l'origine dans* $\mathbf{R}^n$. *Pour tout point* a *de* C, *il existe un difféomorphisme* u *de* $\mathbf{R}^n$ *sur lui-même tel que*

$$u(0) = a \quad \text{et} \quad u|_{\mathbf{R}^n \setminus C} = 1_{\mathbf{R}^n \setminus C}.$$

On se ramène aisément au cas où n est égal à 1. On désigne par α une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ dont le support est contenu dans $[0, r]$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t)\, dt = a \quad \text{et} \quad |\alpha| < 1$$

(une telle fonction existe en vertu du lemme 3, car $|a|$ est strictement inférieur à r). Il suffit alors de poser

$$u(x) = x - \int_{-\infty}^{x} (\alpha(t) - \alpha(-t))\, dt.$$

(2) Le théorème des fonctions réciproques

Dans ce numéro, on désigne par $\mathbf{k}$ le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes.

Si $\mathbf{k}$ est égal à $\mathbf{C}$, indéfiniment dérivable signifie donc holomorphe (chap. I, § 1, proposition 1, corollaire 1).

THÉORÈME 1 (Fonctions réciproques). *Soient U et V deux ensembles ouverts de $\mathbf{k}^n$ et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V. On suppose que la dérivée de u au point ξ est bijective. L'application u est alors un difféomorphisme d'un voisinage de ξ sur un voisinage de $u(\xi)$.*

Par des changements linéaires affines de coordonnées, on peut supposer que ξ et $u(\xi)$ coïncident avec l'origine et que la dérivée $Du(0)$ est l'identité. L'application v de U dans $\mathbf{k}^n$ définie par

$$v(x) = u(x) - x$$

est indéfiniment dérivable et a une dérivée nulle à l'origine. Par continuité, il existe donc un cube $C(0, r)$ relativement compact dans U tel que $Du(x)$ soit bijective et tel que

$$|Dv(x)| \leqslant \frac{1}{2n}$$

pour tout point x de $C(0, r)$ (la norme de $Dv(x)$ est par définition le maximum des modules des dérivées partielles de v au point x). Le théorème des accroissements finis montre que l'on a

$$|v(x') - v(x'')| \leqslant \frac{1}{2}|x' - x''|$$

et par conséquent

$$|u(x') - u(x'')| \geqslant \frac{1}{2}|x' - x''|$$

pour tout couple (x', x'') de points de $C(0, r)$. En particulier, la restriction de u à $C(0, r)$ est injective. Par récurrence sur l'entier k, on définit une application continue de $C\left(0, \frac{r}{2}\right)$ dans $C(0, r)$ en posant

$$w_0(y) = 0 \quad \text{et} \quad w_{k+1}(y) = y - v(w_k(y)).$$

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$| w_{k+1}(y) - w_k(y) | = | v(w_k(y)) - v(w_{k-1}(y)) |$$
$$\leqslant \frac{1}{2} | w_k(y) - w_{k-1}(y) | \leqslant \frac{r}{2^k}.$$

Par conséquent la suite $(w_k)_{k\in\mathrm{N}}$ converge uniformément vers une application continue (holomorphe dans le cas complexe, chap. I, § 1, proposition 1, corollaire 3) w de $C\left(0, \frac{r}{2}\right)$ dans $\bar{C}(0, r)$ et l'on a à la limite

$$w(y) = y - v(w(y)).$$

En particulier, l'application w prend ses valeurs dans $C(0, r)$. Posons

$$V' = C\left(0, \frac{r}{2}\right) \quad \text{et} \quad U' = C(0, r) \cap u^{-1}(V').$$

Pour tout point y de V', on a

$$u(w(y)) = w(y) + v(w(y)) = y,$$

en particulier, l'application w envoie V' dans U'. D'autre part, puisque u est injective sur V', on a

$$w(u(x)) = x$$

pour tout point x de U'. Ceci montre que u est un homéomorphisme de U' sur V' et que w est l'homéomorphisme réciproque. Il reste à voir que w est indéfiniment dérivable.

Pour tout couple (x', x) de points de U', on peut écrire

$$u(x') - u(x) = Du(x)(x' - x) + h(x', x) | x' - x |$$

où $h(\ , x)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque x' tend vers x. Pour tout couple (y, y') de points de V', on a donc

$$w(y') - w(y) = Du(w(y))^{-1}(y' - y)$$
$$+ Du(w(y))^{-1} h(w(y'), w(y)) | w(y') - w(y) |$$

Il résulte d'autre part des inégalités ci-dessus que l'on a

$$\frac{h(w(y'), w(y))}{| y' - y |} \leqslant 2 \frac{h(w(y'), w(y))}{| w(y') - w(y) |}$$

ce qui montre que w est dérivable au point y et que sa dérivée est $Du(w(y))^{-1}$. Comme cette dernière application est continue, on voit que w

est continûment dérivable, puis, par récurrence, qu'elle est indéfiniment dérivable.

THÉORÈME 2 (Théorème du rang). *Soient* U *et* V *deux ensembles ouverts de* $\mathbf{k}^n$ *et* $\mathbf{k}^m$ *respectivement et soit* u *une application indéfiniment dérivable de* U *dans* V. *On suppose que le rang de* u *est constant égal à* p *sur* U. *Pour tout point* ξ *de* U, *il existe un difféomorphisme* ϕ *d'un voisinage* U' *de l'origine dans* $\mathbf{k}^n$ *sur un voisinage de* ξ *dans* U *et un difféomorphisme* ψ *d'un voisinage de* $u(\xi)$ *dans* V *sur un voisinage* V' *de l'origine dans* $\mathbf{k}^m$ *tels que*

$$(\psi \cdot u \cdot \phi)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$$

pour tout point $(x_1, \ldots, x_n)$ *de* U'.

Par des changements linéaires affines de coordonnées, on peut supposer que ξ et $u(\xi)$ coïncident avec l'origine et que la dérivée $Du(0)$ est définie par

$$Du(0)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0).$$

Désignons par v l'application de U dans $\mathbf{k}^n$ définie par

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \big(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_p(x_1, \ldots, x_n), x_{p+1}, \ldots, x_n\big)$$

où $u_1, \ldots, u_m$ désignent les fonctions coordonnées de u. La dérivée de v à l'origine est bijective. Quitte à restreindre U, on peut supposer que v est un difféomorphisme de U sur un cube $C(0, r)$ de $\mathbf{k}^n$ (théorème 1). On désigne par ϕ le difféomorphisme réciproque. Par construction, on a

$$(u \cdot \phi)(x_1, \ldots, x_n) = \big(x_1, \ldots, x_p, w_{p+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, w_m(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

avec

$$w_j = v_j \cdot u \cdot \phi$$

pour tout entier j compris entre $p+1$ et m. Le rang de u étant exactement p, on voit que les fonctions $w_{p+1}, \ldots, w_m$ sont indépendantes des variables $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Il suffit alors de prendre pour ψ la restriction à un voisinage convenable de l'origine de l'application définie par

$$\begin{aligned} &\psi(y_1, \ldots, y_m) \\ &= \big(y_1, \ldots, y_p, y_{p+1} - w_{p+1}(y_1, \ldots, y_p), \ldots, y_m - w_m(y_1, \ldots, y_p)\big). \end{aligned}$$

COROLLAIRE 1. *Soient* U *et* V *deux ensembles ouverts de* $\mathbf{k}^n$ *et* $\mathbf{k}^m$ *respectivement et soit* u *une application indéfiniment dérivable de* U *dans* V. *On suppose que le rang de* u *est égal à* m *en un point* ξ. *Il existe alors un* *voisinage* V' *de* $u(\xi)$ *dans* V, *un voisinage* W *de l'origine dans* $\mathbf{k}^{n-m}$ *et un difféomorphisme* ϕ *de* $V' \times W$ *sur un voisinage de* ξ *dans* U *tels que*

$$u = pr_1 \cdot \phi$$

où pr_1 *désigne la projection canonique de* $V' \times W$ *sur* V'.

On remarque que la dérivée de u demeure surjective au voisinage de ξ.

COROLLAIRE 2. *Soient* U *et* V *deux ensembles ouverts de* $\mathbf{k}^n$ *et* $\mathbf{k}^m$ *respectivement et soit* u *une application indéfiniment dérivable de* U *dans* V. *On suppose que le rang de* u *est égal à* n *en un point* ξ. *Il existe alors un voisinage* U' *de* ξ *dans* U, *un voisinage* W *de l'origine dans* $\mathbf{k}^{m-n}$ *et un difféomorphisme* ϕ *d'un voisinage de* $u(\xi)$ *dans* V *sur* $U' \times W$ tels que

$$\phi \cdot u = 1_{U'} \times 0$$

où 0 *désigne l'application constante de* W *sur l'origine de* $\mathbf{k}^{m-n}$.

On remarque que la dérivée de u demeure injective au voisinage de ξ.

THÉORÈME 3 (Fonctions implicites). *Soient* U *et* V *deux ensembles ouverts de* $\mathbf{k}^n$ *et* $\mathbf{k}^m$ *respectivement et soit* u *une application indéfiniment dérivable de* $U \times V$ *dans* $\mathbf{k}^m$. *On suppose que* u *envoie le point* (ξ, η) *sur l'origine et que la dérivée au point* η *de l'application partielle* $u(\xi, \ )$ *est bijective. Il existe alors un voisinage* $U' \times V'$ *de* (ξ, η) *dans* $U \times V$ *et une application indéfiniment dérivable* v *de* U' *dans* V' *tels que l'ensemble des zéros de* u *dans* $U' \times V'$ *coïncide avec le graphe de* v.

La dérivée au point (ξ, η) de l'application w de $U \times V$ dans $\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m$ définie par

$$w(x, y) = (x, u(x, y))$$

est bijective. Quitte à restreindre $U \times V$, on peut supposer que w est un difféomorphisme sur un voisinage W de $(\xi, 0)$ dans $\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m$. On désigne par ϕ l'isomorphisme réciproque et l'on pose

$$U' = \{ x \in U \mid (x, 0) \in W \}.$$

Il suffit alors de prendre pour $v(x)$ la projection de $\phi(x, 0)$ dans V.

(3) Le théorème de Sard

Soient U et V des ensembles ouverts de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V.

On dit qu'un point x de U est un *point régulier* (resp. un *point critique*) *de* u si le rang de l'application $Du(x)$ est égal à m (resp. strictement inférieur à m). On dit qu'un point y de V est une *valeur régulière* (resp. une *valeur critique*) *de* u si tous les points de $u^{-1}(y)$ sont réguliers (resp. s'il existe un point critique dans $u^{-1}(y)$).

THÉORÈME 4 (Sard). *L'ensemble des valeurs critiques de* u *est de mesure de Lebesgue nulle.*

La démonstration va se faire par récurrence sur n, le résultat étant trivial pour n nul. On désigne par A_0 l'ensemble des points critiques de u et l'on pose

$$A_j = \{ x \in U \mid D^\alpha u(x) = 0 \text{ pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^n \text{ tel que } |\alpha| \leqslant j \}$$

pour tout entier j strictement positif. On a les inclusions

$$U \supset A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_j \supset A_{j+1} \supset \ldots$$

et l'image par u de l'ensemble $A_j \backslash A_{j+1}$ est mesurable.

Montrons tout d'abord que $u(A_0 \backslash A_1)$ est de mesure nulle. Soit ξ un point de $A_0 \backslash A_1$. Par un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}(\xi)$ est non nul, en désignant par $u_1, \ldots, u_m$ les fonctions coordonnées de u.

L'application g de U dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \big(u_1(x_1, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n\big)$$

est de rang n au point ξ. Elle induit donc un isomorphisme d'un voisinage U' de ξ dans U sur un voisinage W de $g(\xi)$ dans $\mathbf{R}^n$ (théorème 1). On désigne par h l'isomorphisme réciproque. Quitte à remplacer u par $u \cdot h$ et U par W (on peut recouvrir $A_0 \backslash A_1$ par une famille dénombrable d'ensembles U'), on peut supposer que l'on a

$$\pi_2 \cdot u = \pi_1$$

en désignant par π_1 (resp. π_2) la projection canonique de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{R}^m$) sur son premier facteur. Dans ces conditions, un point $(y_1, \ldots, y_m)$ de V est une valeur critique de u si et seulement si le point $(y_2, \ldots, y_m)$ est une valeur critique de l'application partielle $u(y_1, \;)$. L'assertion résulte alors du théorème de Fubini ([5], théorème (7.8)) et de l'hypothèse de récurrence.

Supposons j strictement positif et montrons que $u(A_j \backslash A_{j+1})$ est de mesure nulle. Soit ξ un point de $A_j \backslash A_{j+1}$. Par un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer qu'il existe un multi-indice α de longueur j tel que

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(\xi) \neq 0 \qquad \text{avec} \qquad v = D^\alpha u .$$

L'application g de U dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$g(x_1, ..., x_n) = \big(v(x_1, ..., x_n), x_2, ..., x_n\big)$$

est de rang n au point ξ. Elle induit donc un isomorphisme d'un voisinage U' de ξ dans U sur un voisinage W de $(0, \xi_2, ..., \xi_n)$ dans $\mathbf{R}^n$. Désignons par h l'isomorphisme réciproque. L'image par g de l'ensemble $A_j \cap U'$ est contenue dans l'ensemble

$$W' = (0 \times \mathbf{R}) \cap W .$$

On en déduit aisément que les points de $u(A_j \cap U')$ sont des valeurs critiques de l'application $u \cdot h|_{W'}$. L'assertion résulte alors de l'hypothèse de récurrence.

Montrons finalement que l'ensemble $u(A_j)$ est de mesure nulle pour j strictement supérieur à $\frac{n}{m} - 1$, ce qui achèvera la démonstration du théorème. Désignons par C un cube fermé de côté r dans U. Il existe une constante c telle que

$$|u(x) - u(\xi)| \leqslant c\,|x - \xi|^{j+1}$$

pour tout point ξ de $C \cap A_j$ et tout point x de C (théorème des accroissements finis). Désignons par k un entier naturel et divisons C en k^n cubes de côté $\frac{r}{k}$. Soit C_0 l'un d'eux et soit ξ un point de $C_0 \cap A_j$. Pour tout point x de C_0, on a

$$|x - \xi| \leqslant \frac{r}{k} .$$

On en déduit que $u(C_0)$ est contenu dans le cube de côté $2c\left(\frac{r}{k}\right)^{j+1}$ et de centre $u(\xi)$ dans $\mathbf{R}^m$. Ceci montre que $u(C \cap A_j)$ est contenu dans une réunion de cubes dont le volume total est au plus égal à

$$(2cr^{j+1})^m\, k^{n-m(j+1)}$$

ce qui démontre l'assertion.