

Chapitre V COURBES HOLOMORPHES NON COMPACTES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

CHAPITRE V

COURBES HOLOMORPHES NON COMPACTES

Dans tout ce chapitre, on désigne par X une courbe holomorphe connexe non compacte (dénombrable à l'infini) et par π un fibré vectoriel holomorphe sur X .

§ 1. THÉORÈME DE BEHNKE-STEIN

Pour tout ensemble compact K de X , on désigne par $B_K(X, \pi)$ le sous-espace fermé de $L_K^2(X, \pi)$ défini par

$$B_K(X, \pi) = \{v \in L_K^2(X, \pi) \mid v|_{\overset{\circ}{K}} \text{ est holomorphe}\}$$

(chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4).

LEMME 1. *Considérons la forme bilinéaire*

$$\Delta : L_K^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \times L_K^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Pour qu'une section u de $L_K^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ appartienne à l'image de l'opérateur différentiel

$$d'' : H_K^1(X, \pi) \rightarrow L_K^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

il suffit qu'elle soit Δ -orthogonale au sous-espace $B_K(X, \pi^ \otimes \Omega^{1,0})$.*

Désignons par λ une forme linéaire continue sur $L_K^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ nulle sur l'image de d'' . Par dualité, il existe une section v de $L_K^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ et une seule telle que

$$\lambda = \Delta(\cdot, v).$$

En particulier, pour toute section h de $\mathcal{C}_c^\infty(\overset{\circ}{K}, \pi)$, on a

$$\Delta(d''h, v) = \lambda(d''h) = 0.$$

Le théorème de régularité (chap. III, § 1, théorème 2, corollaire) montre que

v appartient à $B_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ et l'on conclut en remarquant que l'image de d'' est fermée (chap. III, § 2, proposition 2).

LEMME 2. Soit K_1 un ensemble compact de X dont le complémentaire n'a pas de composante connexe relativement compacte dans X et soit K_2 un voisinage compact de K_1 . On désigne par E (resp. F) le sous-espace de $L_{K_1}^2(X, \pi)$ formé des sections de la forme $\chi_{K_1} u$ où u est une section de $B_{K_2}(X, \pi)$ (resp. une section de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \pi)$ holomorphe au voisinage de K_1). Alors l'espace E est dense dans l'espace F pour la topologie induite par $L_{K_1}^2(X, \pi)$.

D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer que toute forme linéaire λ continue sur $L_{K_1}^2(X, \pi)$ et nulle sur E s'annule sur F . Par dualité, il existe une section v de $L_{K_1}^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,1})$ et une seule telle que

$$\lambda = \Delta(\cdot, v).$$

Montrons que v est dans l'image de l'opérateur différentiel

$$d'' : H_{K_2}^1(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \rightarrow L_{K_2}^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,1}).$$

Pour cela, il suffit de montrer que v est Δ -orthogonale à $B_{K_2}(X, \pi)$ (lemme 1). Or, pour toute section u de cet espace, on a

$$\Delta(u, v) = \int_X (u, v) = \int_X (\chi_{K_1} u, v) = \lambda(\chi_{K_1} u) = 0.$$

Il existe donc une section w de $H_{K_2}^1(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ telle que

$$v = d'' w.$$

Le théorème de régularité montre que w est holomorphe sur $X \setminus K_1$ et puisque toutes les composantes connexes de $X \setminus K_1$ rencontrent $X \setminus K_2$, le principe du prolongement analytique montre que le support de w est contenu dans K_1 .

Pour toute section u de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \pi)$ holomorphe au voisinage de K_1 , on a

$$\lambda(\chi_{K_1} u) = \int_X (u, v) = \int_X (u, d'' w) = - \int_X (d'' u, w) = 0$$

ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 1 (Behnke-Stein). Pour tout ensemble ouvert U de X dont le complémentaire n'a pas de composante connexe compacte, l'application de restriction de $\mathcal{O}(X, \pi)$ dans $\mathcal{O}(U, \pi)$ est d'image dense.

Il faut montrer que pour toute section u de $\mathcal{O}(U, \pi)$, tout ensemble compact K de U et tout nombre réel ε strictement positif, il existe une section v de $\mathcal{O}(X, \pi)$ telle que

$$\|v - u\|_{L^2, K} \leq \varepsilon$$

la semi-norme $\|\cdot\|_{L^2, K}$ étant relative à des métriques hermitiennes sur Ω^1 et π . On peut supposer que le complémentaire de K n'a pas de composante connexe relativement compacte dans X et qu'il existe une suite exhaustive $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de parties compactes de X ayant la même propriété, telle que K soit égal à K_0 (appendice II, lemmes 5 et 6). Posons

$$u_0 = \chi_{K_0} u.$$

Le lemme 2 montre qu'il existe une section u_1 de $B_{K_2}(X, \pi)$ telle que

$$\|u_1 - u_0\|_{L^2, K_0} \leq \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

Pour tout entier j strictement positif, on construit de la même manière une section u_j de $B_{K_{j+1}}(X, \pi)$ telle que

$$\|u_j - u_{j-1}\|_{L^2, K_{j-1}} \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Pour tout entier n , la suite $(\chi_{K_n} u_j)_{j \geq n}$ est une suite de Cauchy dans $B_{K_n}(X, \pi)$. On désigne par v_n sa limite. Il est clair que les sections v_n se recollent en une section v de $\mathcal{O}(X, \pi)$. Il existe un entier n tel que

$$\|v - u_n\|_{L^2, K} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors

$$\|v - u\|_{L^2, K} \leq \|v - u_n\|_{L^2, K} + \|u_n - u\|_{L^2, K} \leq \varepsilon$$

ce qui démontre l'assertion.

§ 2. CALCUL DE QUELQUES GROUPES DE COHOMOLOGIE

LEMME 1. *Pour tout point x de X , il existe une fonction méromorphe h sur X , holomorphe sur $X \setminus \{x\}$ possédant un pôle simple au point x .*

Désignons par ρ un fibré en droites holomorphe sur X et par s une section holomorphe de ρ dont le diviseur est $1 \cdot x$. Il résulte du théorème de

Behnke-Stein qu'il existe une section holomorphe t de ρ non nulle au point x .

Il suffit alors de prendre pour h la fonction $\frac{t}{s}$.

Remarque 1.

On conserve les notations du lemme 1. La fonction méromorphe h définit une application holomorphe de X dans $\mathbf{P}^1$ de rang 1 au point x , telle que

$$h^{-1}(h(x)) = \{x\}.$$

Pour tout voisinage U relativement compact de x dans X , il existe un voisinage ouvert V de x dans U vérifiant les conditions suivantes:

(1) La restriction de h à V est un isomorphisme de V sur un voisinage ouvert de $(0:1)$ dans $\mathbf{P}^1$.

(2) La trace de $h^{-1}(h(V))$ sur $\bar{U}$ est égale à V .

En effet, supposons qu'il existe un système fondamental de voisinage ouverts $(V_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de x dans U et, pour chaque entier j , un point x_j de V_j et un point y_j de $\bar{U} \setminus V_j$ tels que

$$h(x_j) = h(y_j).$$

On peut toujours supposer que la suite $(y_j)_{j \in \mathbf{N}}$ converge vers un point y de $\bar{U}$ et l'on a

$$h(y) = \lim_{j \rightarrow \infty} h(y_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} h(x_j) = (0:1).$$

Ceci montre que l'on a

$$y = \lim_{j \rightarrow \infty} y_j = x$$

ce qui est absurde puisque h est de rang 1 au point x .

LEMME 2. On désigne par U un ensemble ouvert relativement compact de X . Pour toute forme différentielle u de $L_c^2(U, \Omega^{0,1})$, il existe une fonction f de $H_{\text{loc}}^1(U, \mathbf{C})$ telle que

$$d''f = u.$$

Pour tout point x de U , il existe une application holomorphe h de X dans $\mathbf{P}^1$ et un voisinage ouvert V de x dans U vérifiant les conditions de la remarque 1. Par partition de l'unité, on se ramène aisément au cas où le support de u est contenu dans V . On définit alors une forme différentielle v de $L^2(\mathbf{P}^1, \Omega^{0,1})$ en posant

$$\begin{cases} v(z) = (h|_V)_*(u)(z) & \text{si } z \in h(V) \\ v(z) = 0 & \text{si } z \in \mathbf{P}^1 \setminus h(V). \end{cases}$$

Comme $\mathbf{P}^1$ est de genre 0, il existe une fonction g de $H^1(\mathbf{P}^1, \mathbf{C})$ telle que

$$v = d''g.$$

Il suffit alors de poser

$$f = (g \cdot h)|_v.$$

THÉOREME 1. *L'espace vectoriel $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ est nul.*

Désignons par $(K_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite exhaustive de parties compactes de X dont les complémentaires n'ont pas de composante connexe relativement compacte. Soit u une forme différentielle de $L^2_{\text{loc}}(X, \Omega^{0,1})$. Pour tout entier j , on pose

$$u_j = \chi_{K_{j+1}} u.$$

Il existe une fonction f_j de $H^1_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ telle que

$$\chi_{K_{j+1}} d'' f_j = u_j$$

(lemme 2). En particulier, la fonction

$$\chi_{K_{j+1}}(f_{j+1} - f_j)$$

appartient à $B_{K_{j+1}}(X, \mathbf{C}_X)$ et le théorème de Behnke-Stein montre qu'il existe une fonction holomorphe g_j sur X telle que

$$\|f_{j+1} - f_j - g_j\|_{L^2, K_j} \leq \frac{1}{2^j},$$

la semi-norme étant relative à une métrique hermitienne sur Ω^1 . Pour tout entier n , la série

$$\sum_{j \geq n} \chi_{K_n}(f_{j+1} - f_j - g_j)$$

converge vers un élément de $B_{K_n}(X, \mathbf{C}_X)$ et l'on pose

$$w_n = \chi_{K_n}(f_n - g_0 - \dots - g_{n-1}) + \sum_{j \geq n} \chi_{K_n}(f_{j+1} - f_j - g_j).$$

Il est clair que les fonctions w_n se recollent en une fonction w de $H^1_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ et l'on a

$$d'' w = u$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *Tout fibré en droites holomorphe ρ sur X est trivial. En particulier, l'espace vectoriel $\mathbf{H}^1(X, \rho)$ est nul.*

On sait qu'il existe une section indéfiniment dérivable s de ρ partout non nulle (chap. 0, § 2, théorème 1, corollaire). Désignons par $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des domaines de cartes de ρ et par $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle holo-

morphe de rang 1 subordonné à ce recouvrement représentant ρ . La section s est représentée par des fonctions s_i vérifiant les relations

$$s_i = g_{ik} s_k.$$

En particulier, les formes différentielles $\frac{d'' s_i}{2i\pi s_i}$ se recollent en une forme u de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$. Le théorème 1 montre qu'il existe une fonction f de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ telle que

$$d'' f = u$$

et un calcul élémentaire montre que la section $\exp(-2i\pi f) s$ de ρ est holomorphe et partout non nulle ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 1. *L'espace vectoriel $\mathbf{H}^1(X, \mathbb{C})$ s'identifie canoniquement au conoyau de l'opérateur différentiel*

$$d' : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X, \Omega^{1,0}).$$

L'injection canonique de $\mathcal{O}(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_C^1)$ définit par passage au quotient une application linéaire α de $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbb{C})$. Cette application est surjective. En effet, toute forme différentielle u de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_C^1)$ s'écrit

$$u = u_1 + d'' f$$

avec u_1 de bidegré $(1, 0)$ et f dans $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$. Posons

$$v = u_1 - d' f.$$

On peut écrire

$$u = v + d f.$$

Si de plus u est fermée, la forme différentielle v est holomorphe ce qui démontre l'assertion. Il reste à voir que le noyau de α est égal à l'image de d' . C'est immédiat.

§ 3. FONCTIONS HOLOMORPHES SUR UNE COURBE HOLOMORPHE NON COMPACTE

Pour tout ensemble A de X , on pose

$$\hat{A} = \{x \in X \mid |f(x)| \leq \|f\|_A \text{ pour tout } f \in \mathcal{O}(X)\}.$$

On dit que A est *holomorphiquement convexe* s'il est égal à $\hat{A}$.

LEMME 1. *Pour tout ensemble compact K de X , les ensembles $\hat{K}$ et $\tilde{K}$ sont égaux ¹⁾.*

Soit x un point de $\tilde{K} \setminus K$ et soit V la composante connexe (relativement compacte) de x dans $X \setminus K$. Il est clair que ∂V est contenu dans K et le principe du maximum montre que l'on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\partial V} \leq \|f\|_K$$

pour toute fonction holomorphe f sur X . Ceci montre que $\tilde{K}$ est contenu dans $\hat{K}$.

Réciproquement, soit x un point de $X \setminus \tilde{K}$. On vérifie aisément que l'on a

$$(K \cup \{x\})^\sim = \tilde{K} \cup \{x\}.$$

Le lemme 5 de l'appendice II et le théorème de Behnke-Stein montrent que la fonction qui vaut 0 au voisinage de K et 1 au voisinage de x peut être uniformément approchée sur $\tilde{K} \cup \{x\}$ par une fonction holomorphe f sur X . Si l'approximation est bonne, on a

$$\|f\|_K \leq \|f\|_{\tilde{K}} < |f(x)|$$

ce qui montre que x n'appartient pas à $\hat{K}$.

THÉORÈME 1 (Runge). *Pour tout ensemble compact K de X , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *L'ensemble K est holomorphiquement convexe.*
- (2) *L'ensemble $X \setminus K$ n'a pas de composante connexe relativement compacte dans X .*
- (3) *Toute fonction holomorphe au voisinage de K peut être uniformément approchée sur K par des fonctions holomorphes sur X .*

L'équivalence des deux premières conditions résulte du lemme 1. Le lemme 5 de l'appendice II et le théorème de Behnke-Stein montrent qu'elles impliquent la troisième.

Supposons (3) vérifiée et raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une composante connexe V de $X \setminus K$ relativement compacte dans X . On désigne par x un point de V et par h une fonction méromorphe sur X , holomorphe sur $X \setminus \{x\}$, possédant un pôle simple au point x (§ 2, lemme 1). Cette fonction peut être uniformément approchée sur K par des fonctions

¹⁾ Pour la définition de $\tilde{K}$, voir l'appendice II.

holomorphes sur X et puisque ∂V est contenu dans K , le principe du maximum montre que h peut être uniformément approchée sur $K \cup V$ par des fonctions holomorphes sur X , ce qui est absurde.

THÉORÈME 2. (1) Les fonctions holomorphes sur X séparent les points.

(2) Pour tout point x de X , il existe une fonction holomorphe sur X de rang 1 au point x .

(3) Pour tout ensemble compact K de X , l'ensemble $\hat{K}$ est compact.

On désigne par x et y des points distincts de X . Il est clair que l'on a

$$\{x, y\}^{\sim} = \{x, y\}$$

et la fonction qui vaut 0 (resp. 1) au point x (resp. y) peut être uniformément approchée sur $\{x, y\}$ par une fonction holomorphe sur X . Si l'approximation est bonne, elle prend des valeurs distinctes en x et y , ce qui démontre (1).

On désigne par x un point de X et par ϕ une carte de X dont le domaine contient x . Il existe un voisinage compact K de x dans le domaine de ϕ tel que $X \setminus K$ n'ait pas de composante connexe relativement compacte dans X . La fonction ϕ peut être uniformément approchée sur K par une fonction holomorphe f sur X . Si l'approximation est bonne, la fonction f est de rang 1 au point x (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4), ce qui démontre (2).

La dernière assertion résulte immédiatement du lemme 1 (appendice II, lemme 2).

Remarque 1.

On appelle *variété de Stein* toute variété holomorphe Y de dimension pure n , dénombrable à l'infini, vérifiant les conditions suivantes:

(1) Les fonctions holomorphes séparent les points de Y .

(2) Pour tout point x de Y , il existe une application holomorphe de Y dans $\mathbb{C}^n$ de rang n au point x .

(3) Pour toute partie compacte K de Y , l'ensemble

$$\hat{K} = \{x \in Y \mid |u(x)| \leq \|u\|_K \text{ pour tout } u \in \mathcal{O}(Y)\}$$

est compact.

Le théorème 2 montre donc que toute courbe holomorphe ouverte dénombrable à l'infini est une variété de Stein.

§ 4. FONCTIONS MÉROMORPHES SUR UNE COURBE HOLOMORPHE NON COMPACTE

THÉORÈME 1 (Mittag-Leffler). *Toute partie principale d'un fibré en droites holomorphe sur X provient d'une section méromorphe.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire du théorème 1 du paragraphe 2 (chap. I, § 3, proposition 2).

Remarque 1.

En fait, le théorème 1 est valable pour tout fibré vectoriel holomorphe sur X (voir théorème 3 ci-dessous).

THÉORÈME 2 (Weierstrass). *Tout diviseur de X est le diviseur d'une fonction méromorphe.*

C'est une conséquence immédiate du corollaire du théorème 1 du paragraphe 2 (chap. I, § 3, proposition 3).

COROLLAIRE. *Toute fonction méromorphe h sur X est le quotient de deux fonctions holomorphes ne s'annulant pas simultanément.*

Il existe une fonction holomorphe v sur X dont le diviseur est $\sup(- (h), 0)$. La fonction u définie par

$$u = vh$$

est holomorphe et ne s'annule pas en même temps que v , d'où l'assertion.

PROPOSITION 1. *Soit A un ensemble fermé discret de X et soit f une fonction à valeurs complexes définie sur A . Il existe alors une fonction holomorphe h sur X prolongeant f .*

Désignons par u une fonction holomorphe sur X dont le diviseur est donné par la formule

$$(u) = \sum_{x \in A} 1 \cdot x$$

(théorème 2) et par v une fonction méromorphe sur X vérifiant les relations

$$\begin{aligned} v_x - f(x) u_x^{-1} &\in \mathcal{O}_x & \text{si } x \in A \\ v_x &\in \mathcal{O}_x & \text{si } x \in X \setminus A \end{aligned}$$

(théorème 1). Il suffit alors de poser

$$h = uv.$$

PROPOSITION 2. Désignons par π un fibré vectoriel holomorphe sur X et par σ le fibré quotient de π par un sous-fibré en droites holomorphe ρ . Pour toute section holomorphe t de σ , il existe une section holomorphe s de π relevant t .

Par définition même du fibré quotient (chap. 0, § 2, exemple 3), il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de X et, pour chaque indice i , une section holomorphe s_i de π sur U_i relevant $t|_{U_i}$. La section $s_{\kappa i}$ définie sur $U_i \cap U_\kappa$ par

$$s_{\kappa i} = s_i - s_\kappa$$

prend ses valeurs dans ρ . Il existe donc pour chaque indice i une section f_i de $\mathcal{C}^\infty(U_i, \rho)$ telle que

$$s_{\kappa i} = f_i - f_\kappa$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). Comme $s_{\kappa i}$ est holomorphe, les formes différentielles $d'' f_i$ se recollent en une forme différentielle u de $\mathcal{C}^\infty(X, \rho \otimes \Omega^{0,1})$. Il existe donc une section f de $\mathcal{C}^\infty(X, \rho)$ telle que

$$d'' f = u$$

(§ 2, théorème 1, corollaire). Ceci montre que les sections $s_i - f_i + f|_{U_i}$, qui se recollent en une section s de π sont holomorphes. Comme elles relèvent $t|_{U_i}$, ceci démontre l'assertion.

THÉORÈME 3. Tout fibré vectoriel holomorphe π sur X est trivial.

On va raisonner par récurrence sur le rang p de π . Si p est égal à 1, l'assertion résulte du corollaire du théorème 1 du paragraphe 2. Supposons p au moins égal à 2 et le théorème démontré pour $p - 1$.

Nous allons tout d'abord construire une section holomorphe s_1 de π partout non nulle. Le théorème de Behnke-Stein montre qu'il existe une section holomorphe s de π non identiquement nulle. Pour toute carte Φ de π ayant pour domaine un ensemble connexe U , on a

$$s_\Phi = (u_1, \dots, u_p)$$

où $u_1, \dots, u_p$ sont des fonctions holomorphes sur U dont l'une au moins n'est pas nulle. On vérifie aisément que le diviseur v défini par

$$v|_U = \inf_{1 \leq j \leq p} (u_j)$$

est indépendant de Φ et l'on désigne par f une fonction holomorphe sur X ayant v pour diviseur (théorème 2). Il est clair que la section

$$s_1 = \frac{s}{f}$$

est holomorphe et partout non nulle.

Désignons par ρ le fibré en droites holomorphe engendré par s_1 et par σ le fibré quotient de π par ρ . Par hypothèse de récurrence, il existe des sections holomorphes $t_2, \dots, t_p$ de σ qui engendrent la fibre en tout point. Ces sections se relèvent en des sections holomorphes $s_2, \dots, s_p$ de π (proposition 2). Il est clair que $s_1, \dots, s_p$ engendrent la fibre de π en tout point, ce qui démontre l'assertion.