§7. Variétés de Picard et de Jacobi

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Sinon q est au plus égal à $\dfrac{m-1}{l}$ et l'on a

$$\left[m\left(1-\frac{1}{l}\right)\right] = m - q - 1 \geqslant m - 1 - \frac{m-1}{l} = (m-1)\left(1-\frac{1}{l}\right)$$

ce qui établit l'assertion.

On en déduit que

$$0(a_m) = m(2g-2) + \sum_{x \in X}\left[m\left(1-\frac{1}{\rho_x}\right)\right]$$
$$\geqslant m(2g-2) + (m-1)\sum_{x \in X}\left(1-\frac{1}{\rho_x}\right)$$

ou encore

$$0(a_m) \geqslant (m-1)\left(2g-2+\sum_{x\in X}\left(1-\frac{1}{\rho_x}\right)\right) + 2g-2\,.$$

Si m est au moins égal à 2, le résultat est donc une conséquence du lemme 3

§ 7. Variétés de Picard et de Jacobi

Désignons par E un espace vectoriel complexe de dimension finie n et par Γ un réseau de E (i.e. un sous-groupe abélien de rang $2n$). L'application canonique π de E dans E/Γ est un revêtement. On munit E/Γ de l'unique structure holomorphe faisant de π un isomorphisme local. On appelle *tore complexe* toute variété holomorphe isomorphe à une variété de la forme E/Γ.

Soit T (resp. T') un tore complexe de la forme E/Γ (resp. E'/Γ') et soit u un isomorphisme de T sur T'. On désigne par π (resp. π') l'application canonique de E dans T (resp. de E' dans T'). Quitte à modifier u par un automorphisme de T', on peut supposer que l'on a

$$u(\pi(0)) = \pi'(0)\,.$$

Il existe alors un isomorphisme v de E sur E' et un seul tel que

$$v(0) = 0 \quad \text{et} \quad \pi' \cdot v = u \cdot \pi\,.$$

Pour tout élément γ de Γ, l'image $v(\gamma)$ est un élément γ' de Γ' et l'on vérifie aisément que l'on a

$$v(z+\gamma) = v(z) + \gamma'$$

pour tout point z de E. En particulier, la dérivée de v est Γ-invariante. Elle est donc constante en vertu du principe du maximum.

Il résulte de ce qui précède que T et T' sont isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire v de E sur E' tel que

$$v(\Gamma) = \Gamma'$$

(chap. I, § 5, numéro 3).

Lemme 1. *Désignons par* Ω *une matrice de* $M(n, 2n; \mathbf{C})$ *et par* Γ *le sous-groupe de* $\mathbf{C}^n$ *engendré par les vecteurs colonnes de* Ω. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Le sous-groupe Γ *est un réseau de* $\mathbf{C}^n$.

(2) La matrice $\begin{pmatrix} \Omega \\ \overline{\Omega} \end{pmatrix}$ *est inversible.*

(3) Le vecteur nul est le seul vecteur $(z_1, \ldots, z_n)$ *de* $\mathbf{C}^n$ *tel que le vecteur*

$$(z_1, \ldots, z_n)\,\Omega$$

soit réel.

La démonstration est un simple exercice d'algèbre linéaire.

Lemme 2. *Désignons par* Ω *(resp.* Ω'*) une matrice de* $M(n, 2n; \mathbf{C})$ *et par* Γ *(resp.* Γ'*) le sous-groupe de* $\mathbf{C}^n$ *engendré par les vecteurs colonnes de* Ω *(resp.* Ω'*). On suppose que* Γ *et* Γ' *sont des réseaux. Pour que les tores complexes* $\mathbf{C}^n/\Gamma$ *et* $\mathbf{C}^n/\Gamma'$ *soient isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe une matrice* M *de* $G(n; \mathbf{C})$ *et une matrice* Λ *de* $G(2n; \mathbf{Z})$ *telles que*

$$\Omega' = M\,\Omega\,\Lambda\,.$$

C'est une conséquence immédiate de ce qui précède.

Rappelons que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0}) \xrightarrow{\alpha} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \longrightarrow 0$$

(§ 1, proposition 2). On sait d'autre part que $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ s'identifie à un sous-espace vectoriel réel de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$.

Lemme 3. *Par restriction, l'application* β *induit un isomorphisme* $\mathbf{R}$*-linéaire de* $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ *sur* $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$.

Toute forme différentielle (réelle) de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1)$ s'écrit

$$u = v + \overline{v}$$

avec v dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,0})$. En effet, pour toute carte ϕ de domaine U dans X, on a

$$u|_U = u_1 d\phi_1 + u_2 d\phi_2,$$

en désignant par ϕ_1 et ϕ_2 les parties réelle et imaginaire de ϕ. Il suffit alors de poser

$$v|_U = \frac{1}{2}(u_1 - iu_2)\,d\phi \qquad \text{et} \qquad \bar{v}|_U = \frac{1}{2}(u_1 + iu_2)\,d\bar{\phi}\,.$$

Supposons de plus u fermée. L'image par β de la classe de u n'est autre que la classe de $\bar{v}$. Si cette classe est nulle, on a

$$u = v + \bar{v} = d'\bar{f} + d''f$$

pour une certaine fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. Il résulte de cette équation que la fonction $f - \bar{f}$ est harmonique, donc constante. On en déduit que

$$u = d'f + d''f = df$$

ce qui démontre l'assertion.

Il résulte en particulier du lemme 3 que l'image par β du sous-groupe $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ est un réseau de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ (chap. 0, § 5, théorème 1, corollaire 2). Notons que l'image par β de la classe d'un élément h de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ est la classe de la différentielle

$$\frac{1}{2i\pi}\,\frac{d''h}{h}\,.$$

Proposition 1. *La suite de groupes abéliens et d'homomorphismes*

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\beta} \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*) \xrightarrow{\mathrm{ch}} \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

est exacte [1]).

Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$, il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota\in I}$ de X et, pour chaque indice ι, une fonction f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$u|_{U_\iota} = d''f_\iota\,.$$

Les fonctions définies sur $U_\iota \cap U_\kappa$ par

$$f_{\kappa\iota} = f_\kappa - f_\iota \qquad \text{et} \qquad g_{\kappa\iota} = \exp(2i\pi f_{\kappa\iota})$$

sont holomorphes et la famille $(g_{\kappa\iota})$ est un cocycle de rang 1 subordonnée à (U_ι) dont la classe dans $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ est précisément l'image par θ de la

[1]) La définition de θ a été donnée au paragraphe 2.

classe de u. Désignons par π un fibré en droites holomorphe sur X correspondant à ce cocycle. Les fonctions $\exp(2i\pi f_\iota)$ se recollent en une section partout non nulle f de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ ce qui montre déjà que la classe de Chern de π est nulle.

Si u est de la forme

$$u = \frac{1}{2i\pi}\frac{d''h}{h}$$

pour une certaine fonction h de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$, la section $h^{-1}f$ de π est holomorphe et partout non nulle ce qui montre que π est trivial.

Réciproquement, si π est trivial, il existe pour tout indice ι une fonction holomorphe inversible g_ι sur U_ι telle que

$$g_\kappa = g_{\kappa\iota}\, g_\iota .$$

Les fonctions $\exp(2i\pi f_\iota)\, g_\iota^{-1}$ se recollent en une fonction h de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ et l'on a

$$\left.\frac{1}{2i\pi}\frac{d''h}{h}\right|_{U_\iota} = d''f_\iota = u\,|_{U_\iota} .$$

Ceci montre que la classe de u est dans l'image de β.

Il reste à voir que tout fibré en droites holomorphe π sur X dont la classe de Chern est nulle provient d'un élément de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. Désignons par $(U_\iota)_{\iota\in I}$ un recouvrement ouvert de X par des ensembles simplement connexes et par $(g_{\kappa\iota})$ un cocycle holomorphe de rang 1 subordonné à (U_ι), représentant π. Le fibré π étant différentiablement trivial (chap. 0, § 5, théorème 4), il existe pour tout indice ι une fonction g_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C}^*)$ telle que

$$g_\kappa = g_{\kappa\iota} g_\iota .$$

Puisque U_ι est simplement connexe, il existe une fonction f_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$g_\iota = \exp(2i\pi f_\iota) .$$

Il résulte de ces définitions que l'on a

$$d''f_\iota = \frac{1}{2i\pi}\frac{d''g_\iota}{g_\iota} = \frac{1}{2i\pi}\frac{d''g_\kappa}{g_\kappa} = d''f_\kappa .$$

Autrement dit, les formes différentielles $d''f_\iota$ se recollent en une forme u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ ayant toutes les propriétés requises.

Le noyau de ch s'identifie au quotient de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ par le réseau $\operatorname{Im}\beta$. Ce noyau est donc un tore complexe de dimension g que l'on appelle la *variété de Picard de* X et que l'on désigne par **Pic** (X).

Désignons par G le groupe fondamental de X en un point base x_0 et par $c_1, \ldots, c_{2g}$ des lacets de X en x_0 dont les classes forment une base du $\mathbf{Z}$-module libre $\tilde{G}$ (chap. 0, § 5, théorème 3).

Pour tout entier j compris entre 1 et $2g$, il existe par dualité un élément u_j de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ tel que

$$\int_{c_k} u_j = \delta_{jk}$$

pour tout entier k compris entre 1 et $2g$ (chap. 0, § 5, théorème 2, corollaire 2).

Désignons encore par $v_1, \ldots, v_g$ une base de l'espace vectoriel $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$ des formes différentielles holomorphes. On pose

$$\omega_{jk} = \int_{c_k} v_j \quad \text{et} \quad \Omega = (\omega_{jk})_{1 \leqq j \leqq g, 1 \leqq k \leqq 2g} .$$

Remarquons que l'on a par définition

$$v_j = \sum_{1 \leqq k \leqq 2g} \omega_{jk} u_k .$$

Autrement dit, la matrice ${}^t\Omega$ est la matrice de l'application α exprimée dans les bases $v_1, \ldots, v_g$ et $u_1, \ldots, u_{2g}$.

LEMME 4. *Les vecteurs colonnes de* Ω *engendrent un réseau de* $\mathbf{C}^g$.

Tout vecteur $(z_1, \ldots, z_g)$ de $\mathbf{C}^g$ tel que le vecteur

$$(z_1, \ldots, z_g)\,\Omega$$

soit réel est nul. En effet, cette condition signifie que la forme différentielle holomorphe

$$z_1 v_1 + \ldots + z_g v_g$$

est réelle. L'assertion est donc une conséquence des lemmes 3 et 1.

Le tore complexe de dimension g défini par la matrice Ω s'appelle la *variété de Jacobi de* X et se désigne par **Jac** (X). On notera que cette variété est définie à isomorphisme près par le choix d'une base de $\tilde{G}$ et d'une base de $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$.

Pour tout couple (j, k) d'entiers compris entre 1 et $2g$, on pose

$$\lambda_{jk} = \int_X u_j \wedge u_k \quad \text{et} \quad \Lambda = (\lambda_{jk})_{1 \leqq j,k \leqq 2g} .$$

La matrice Λ n'est autre que la matrice d'intersection de X (chap. 0, § 5, remarque 3). Elle appartient donc à $G(2g; \mathbf{Z})$.

THÉORÈME 1 (Riemann). *(1) La matrice $\Omega\Lambda^t\Omega$ est nulle (égalités de Riemann).*

(2) La matrice hermitienne $i\Omega\Lambda^t\overline{\Omega}$ est positive non dégénérée (inégalités de Riemann).

Conservons les notations précédentes. Pour tout couple d'entiers (j, k) compris entre 1 et g, la forme différentielle $v_j \wedge v_k$ est identiquement nulle (puisque de bidegré (2, 0)). On a donc

$$0 = \int_X v_j \wedge v_k = \sum_{1 \leq p,q \leq 2g} \omega_{jp}\,\omega_{kq} \int_X u_p \wedge u_q = \sum_{1 \leq p,q \leq 2g} \omega_{jp}\,\lambda_{pq}\,\omega_{kq}$$

ce qui démontre la première assertion.

Pour toute forme différentielle holomorphe v sur X, la forme différentielle $iv \wedge \bar{v}$ est positive (ceci se vérifie aisément dans une carte). Désignons par $z_1, \ldots, z_g$ les coordonnées de v dans la base $v_1, \ldots, v_g$. Les formes différentielles $u_1, \ldots, u_{2g}$ étant réelles, on a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant i \int_X v \wedge \bar{v} &= \sum_{1 \leq j,k \leq g} z_j \bar{z}_k\, i \int_X v_j \wedge \bar{v}_k \\ &= \sum_{1 \leq j,k \leq g} \;\sum_{1 \leq p,q \leq 2g} i z_j \omega_{jp} \lambda_{pq} \bar{\omega}_{kq} \bar{z}_k \end{aligned}$$

L'égalité ne pouvant apparaître que si v est nulle, ceci démontre la seconde assertion.

Désignons par Ω' la matrice de β dans la base $u_1, \ldots, u_{2g}$ et dans une base quelconque de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$. Cette matrice est de rang g et l'on a

$$\Omega' \cdot {}^t\Omega = 0\,.$$

De plus, les vecteurs colonnes de Ω' engendrent un réseau de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ et le quotient de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}_X)$ par ce réseau n'est autre que $\mathbf{Pic}(X)$ (en effet, les vecteurs colonnes de Ω' sont les images par β des éléments $u_1, \ldots, u_{2g}$).

LEMME 5. *Les variétés* **Pic** (X) *et* **Jac** (X) *sont isomorphes.*

Posons

$$P = i\,\Omega\Lambda^t\overline{\Omega} \qquad \text{et} \qquad Q = \Omega'{}^t\overline{\Omega}\,.$$

La matrice P est inversible (inégalités de Riemann). Montrons qu'il en est de même de Q. Les égalités de Riemann montrent que l'on a

$$\Omega' \, {}^t\!\begin{pmatrix} \Omega \\ \overline{\Omega} \end{pmatrix} = (\Omega'{}^t\Omega \;\; \Omega'{}^t\overline{\Omega}) = (0 \;\; \Omega'{}^t\overline{\Omega})$$

d'où l'assertion puisque Ω' est de rang g et $({}^t\Omega \; {}^t\overline{\Omega})$ de rang $2g$. On a alors

$$\begin{pmatrix} \Omega' \\ \overline{\Omega'} \end{pmatrix} {}^t\!\begin{pmatrix} \Omega \\ \overline{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega' \\ \overline{\Omega'} \end{pmatrix} ({}^t\Omega \; {}^t\overline{\Omega}) = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ \overline{Q} & 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$${}^t\!\begin{pmatrix} \Omega \\ \overline{\Omega} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{Q}^{-1} \\ Q^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega' \\ \overline{\Omega'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Q}^{-1} \, \overline{\Omega'} \\ Q^{-1} \, \Omega' \end{pmatrix}$$

Posons

$$M = iQP^{-1} .$$

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$M\Omega\Lambda = M\Omega\Lambda ({}^t\Omega \; {}^t\overline{\Omega}) \begin{pmatrix} \overline{Q}^{-1} \, \overline{\Omega'} \\ Q^{-1} \, \Omega' \end{pmatrix} = M(0 \;\; -iP) \begin{pmatrix} \overline{Q}^{-1} \, \overline{\Omega'} \\ Q^{-1} \, \Omega' \end{pmatrix} = \Omega'$$

ce qui démontre l'assertion.

Notons qu'un isomorphisme υ de **Jac** (X) sur **Pic** (X) est induit par l'isomorphisme de $\mathbf{C}^g$ sur lui-même associé à la matrice M.

Pour tout point x de X, on désigne par ξ_x le fibré principal associé au diviseur $1 \cdot x$. On définit une application Ξ de X dans **Pic** (X) en posant

$$\Xi(x) = \xi_x \, \xi_{x_0}^{-1} .$$

Par définition même, la classe dans **Jac** (X) du vecteur

$$(\textstyle\int_c v_1, \ldots, \int_c v_g)$$

ne dépend pas du chemin c joignant x_0 à x. Cette classe se désigne par $Y(x)$. On définit ainsi une application Y de X dans **Jac** (X).

LEMME 6. *Le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ {\scriptstyle Y} \swarrow & & \searrow {\scriptstyle \Xi} \\ \mathbf{Jac}\,(X) & \xrightarrow{\;\upsilon\;} & \mathbf{Pic}\,(X) \end{array}$$

est commutatif.

Soit c un chemin joignant x_0 à un point x de X. Le fibré principal $\Xi(x)$ est associé au diviseur $1 \cdot x - 1 \cdot x_0$. Il existe donc une forme différentielle w dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$ vérifiant les conditions suivantes:

(1) L'image par θ de la classe de w est le fibré principal $\Xi(x)$.

(2) Pour toute forme différentielle holomorphe v sur X, on a

$$\int_X v \wedge w = \int_c v$$

(§ 2, lemme 1). Il existe d'autre part une fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que la forme $w + d''f$ soit fermée (§ 1, proposition 1). On a alors

$$w + d''f = \sum_{1 \leq j \leq 2g} w_j u_j$$

où $w_1, \ldots, w_{2g}$ sont des nombres complexes. Pour tout entier j compris entre 1 et g, on a

$$\begin{aligned}\int_c v_j = \int_X v_j \wedge w = \int_X v_j \wedge (w + d''f) &= \sum_{1 \leq k \leq 2g} w_k \int_X v_j \wedge u_k \\ &= \sum_{1 \leq k,l \leq 2g} w_k \, \omega_{jl} \, \lambda_{lk}\end{aligned}$$

Ceci montre que $Y(x)$ est la classe dans **Jac** (X) du vecteur $\Omega\Lambda(w+d''f)$. Avec les notations du lemme 5, on a donc

$$\begin{aligned}\Omega\Lambda(w+d''f) &= \Omega\Lambda({}^t\Omega \; {}^t\overline{\Omega}) \begin{pmatrix} \overline{Q}^{-1} \, \overline{\Omega}' \\ Q^{-1} \, \Omega' \end{pmatrix} (w + d''f) \\ &= (0 \quad -iP) \begin{pmatrix} \overline{Q}^{-1} \, \overline{\Omega}' \\ Q^{-1} \, \Omega' \end{pmatrix} (w + d''f) = M^{-1}\Omega'(w+d''f)\end{aligned}$$

et l'on conclut en remarquant que la classe de $\Omega'(w+d''f)$ dans **Pic** (X) n'est autre que $\Xi(x)$.

LEMME 7. *Soit* π *un fibré en droites holomorphe sur* X *associé à un diviseur de la forme* $1 \cdot x$. *Si* g *est au moins égal à* 1, *la dimension de* $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ *est égale à* 1.

Supposons qu'il existe deux sections holomorphes s_0 et s_1 de π linéairement indépendantes et considérons l'application holomorphe $(s_0 : s_1)$ de X dans $\mathbf{P}^1$. Pour tout couple (λ_0, λ_1) de nombres complexes non tous deux nuls, la section $\lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1$ possède un zéro et un seul. En effet, son ordre est égal à la classe de Chern de π. On en déduit aisément que l'application $(s_0 : s_1)$ est un isomorphisme (chap. I, § 4, proposition 1, corollaire), ce qui démontre l'assertion.

LEMME 8. *Si* g *est au moins égal à* 1, *les formes différentielles holomorphes sur* X *n'ont pas de zéro commun.*

Pour tout point x de X il existe un fibré en droites holomorphe π sur X et une section holomorphe s de π dont le diviseur associé est $1 \cdot x$. Il résulte du théorème de Riemann-Roch et du lemme 7 que l'on a

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) = g - 1 .$$

D'autre part, l'application $\otimes\, s$ induit un isomorphisme de $\mathbf{H}^0\,(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ sur l'espace $L\,(1 \cdot x)$ des formes différentielles holomorphes qui s'annulent au point x. On en déduit que $L\,(1 \cdot x)$ est distinct de $\mathbf{H}^0\,(X, \Omega^{1,0})$ ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 2. *Si* g *est au moins égal à* 1, *l'application canonique* Ξ *de* X *dans* **Pic** (X) *est un plongement.*

Conservons les notations précédentes. Soit U un ensemble ouvert simplement connexe dans X. Il existe des fonctions holomorphes $h_1, \ldots, h_g$ sur U telles que

$$v_1\,|_U = dh_1, \ldots, v_g\,|_U = dh_g .$$

L'application holomorphe $(h_1, \ldots, h_g)$ de U dans $\mathbf{C}^g$ est un relèvement de $Y|_U$. Ceci montre déjà que Y (et par conséquent Ξ) est holomorphe et de rang 1 (lemme 8).

Montrons que Ξ est injective. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe deux points distincts x et y de X tels que ξ_x et ξ_y coïncident. Désignons par π un fibré en droites holomorphe correspondant au fibré principal ξ_x. La dimension de $\mathbf{H}^0\,(X, \pi)$ est au moins égale à 2 ce qui est absurde (lemme 7).

COROLLAIRE. *Toute courbe holomorphe compacte connexe de genre* 1 *est une courbe elliptique.*