

## §2. Dualité

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§ 2. DUALITÉ

On désigne toujours par  $X$  une courbe holomorphe et par  $\pi$  un fibré vectoriel holomorphe sur  $X$ .

Rappelons que l'on a deux dualités canoniques d'espaces vectoriels topologiques (chap. 0, § 4, exemple 1)

$$\Delta: L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \times L_{loc}^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \rightarrow \mathbb{C}$$

et

$$\Delta: L_{loc}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \times L_c^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

L'ensemble des sections holomorphes (resp. holomorphes à support compact) de  $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$  s'identifie à un sous-espace fermé de  $L_{loc}^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$  (resp.  $L_c^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ ).

PROPOSITION 1. *Pour qu'une section  $u$  de  $L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$  (resp.  $L_{loc}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ ) soit adhérente à l'image de l'opérateur*

$$d'': H_c^1(X, \pi) \rightarrow L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

(resp.  $d'': H_{loc}^1(X, \pi) \rightarrow L_{loc}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ )

*il faut et il suffit qu'elle soit  $\Delta$ -orthogonale au sous-espace  $\mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$  (resp.  $\mathcal{O}_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ ).*

Pour toute section  $h$  de  $H_c^1(X, \pi)$  et toute section  $v$  de  $\mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ , on a

$$\Delta(d''h, v) = \int_X (d''h, v) = - \int_X (h, d''v) = 0,$$

ce qui montre la nécessité de la condition puisque la forme bilinéaire  $\Delta$  est séparément continue.

Réciproquement, désignons par  $\alpha$  une forme linéaire continue sur  $L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$  nulle sur l'image de  $d''$ . Par dualité, il existe une section  $v$  de  $L_{loc}^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$  telle que

$$\Delta(\cdot, v) = \alpha.$$

En particulier, pour toute section  $h$  de  $\mathcal{C}_c^\infty(X, \pi)$ , on a

$$\Delta(d''h, v) = \int_X (d''h, v) = \alpha(d''h) = 0.$$

Il résulte alors du théorème de régularité (§ 1, théorème 2, corollaire) que  $v$  est holomorphe et l'on a

$$\alpha(u) = \Delta(u, v) = 0.$$

On conclut à l'aide du théorème de Hahn-Banach.

THÉORÈME 1. *Par restriction et passage au quotient, les bijections canoniques*

$$\Delta_1: L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \rightarrow L_{\text{loc}}^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$$

et

$$\Delta_2: L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \rightarrow L_c^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$$

*induisent des bijections*

$$\tilde{\Delta}_1: L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})/\overline{\text{Im } d''} \rightarrow \mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$$

et

$$\tilde{\Delta}_2: L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})/\overline{\text{Im } d''} \rightarrow \mathcal{O}_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})' .$$

Il résulte de la proposition 1 que les applications  $\tilde{\Delta}_1$  et  $\tilde{\Delta}_2$  sont bien définies et injectives. Le théorème de Hahn-Banach montre qu'elles sont surjectives.

COROLLAIRE (Théorème de dualité). (1) *Si l'image de l'opérateur*

$$d'': H_c^1(X, \pi) \rightarrow L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

*est fermée, les espaces vectoriels  $\mathbf{H}_c^1(X, \pi)$  et  $\mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$  sont canoniquement isomorphes.*

(2) *Si l'image de l'opérateur*

$$d'': H_{\text{loc}}^1(X, \pi) \rightarrow L_{\text{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

*est fermée, les espaces vectoriels  $\mathbf{H}^1(X, \pi)$  et  $\mathbf{H}_c^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$  sont canoniquement isomorphes.*

*Remarque 1.*

Il résulte aisément du théorème du graphe fermé que les applications  $\tilde{\Delta}_1$  et  $\tilde{\Delta}_2$  du théorème 1 sont des isomorphismes.

PROPOSITION 2. *Pour toute partie compacte  $K$  de  $X$ , l'opérateur*

$$d'': H_K^1(X, \pi) \rightarrow L_K^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

*a une image fermée et un noyau de dimension finie.*

Désignons par  $j$  l'injection canonique de  $H_K^1(X, \pi)$  dans  $L_K^2(X, \pi)$  et considérons les applications linéaires continues

$$H_K^1(X, \pi) \xrightarrow{\begin{pmatrix} j, d'' \\ -j, 0 \end{pmatrix}} L_K^2(X, \pi) \oplus L_K^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

L'application  $(j, d'')$  est injective d'image fermée (§ 1, remarque 3). L'application  $(-j, 0)$  est un opérateur compact en vertu du lemme de Rellich

(chap. II, § 2, théorème 2). L'assertion est alors une conséquence immédiate d'un résultat classique sur les opérateurs compacts ([2], théorème (11.3.2) et problème (11.3.2)).

COROLLAIRE (Théorème de finitude). *Si la courbe holomorphe  $X$  est compacte, l'image de l'opérateur*

$$d'' : H^1(X, \pi) \rightarrow L^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

*est fermée. Les espaces  $H^1(X, \pi)$  et  $H^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$  sont alors canoniquement isomorphes et les espaces  $H^0(X, \pi)$  et  $H^1(X, \pi)$  sont de dimension finie.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 et du théorème de dualité.

### § 3. LE CAS DU LAPLACIEN

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'opérateur différentiel

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right).$$

Soit  $X$  un ensemble ouvert de  $\mathbf{C}$ . On dit qu'une fonction  $u$  de  $\mathcal{C}^2(X, \mathbf{C})$  est *harmonique* si elle vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) = 0.$$

Il résulte de cette définition que  $u$  est harmonique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont harmoniques.

On désigne par  $\mathcal{H}(X, \mathbf{k})$  (avec  $\mathbf{k}$  égal à  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ) l'ensemble des fonctions harmoniques sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbf{k}$ .

Remarquons que  $\mathcal{H}(X, \mathbf{k})$  est une sous-algèbre fermée de  $\mathcal{C}^2(X, \mathbf{k})$ .

PROPOSITION 1. *Supposons  $X$  simplement connexe. Pour qu'une fonction  $u$  de  $\mathcal{C}^2(X, \mathbf{R})$  soit harmonique, il faut et il suffit qu'elle soit la partie réelle d'une fonction holomorphe.*

La suffisance résulte de ce qui précède. Si  $u$  est harmonique, la forme différentielle  $\frac{\partial u}{\partial z} dz$  est holomorphe, donc fermée. Il existe par conséquent une fonction holomorphe  $h$  sur  $X$  telle que

$$\frac{1}{2} dh = \frac{\partial u}{\partial z} dz$$