§2. Dualité

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

§ 2. Dualité

On désigne toujours par X une courbe holomorphe et par π un fibré vectoriel holomorphe sur X.

Rappelons que l'on a deux dualités canoniques d'espaces vectoriels topologiques (chap. 0, § 4, exemple 1)

$$\Delta\colon L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \times L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \to \mathbf{C}$$

et

$$\Delta\colon L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \times L^2_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \to \mathbf{C}\,.$$

L'ensemble des sections holomorphes (resp. holomorphes à support compact) de $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$ s'identifie à un sous-espace fermé de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ (resp. $L^2_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$).

Proposition 1. *Pour qu'une section u de $L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ (resp. $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$) soit adhérente à l'image de l'opérateur*

$$d''\colon H^1_c(X, \pi) \to L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$
$$(\textit{resp. } d''\colon H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}))$$

il faut et il suffit qu'elle soit Δ-orthogonale au sous-espace $\mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ (resp. $\mathcal{O}_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$).

Pour toute section h de $H^1_c(X, \pi)$ et toute section v de $\mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$, on a

$$\Delta(d''h, v) = \int_X (d''h, v) = -\int_X (h, d''v) = 0\,,$$

ce qui montre la nécessité de la condition puisque la forme bilinéaire Δ est séparément continue.

Réciproquement, désignons par α une forme linéaire continue sur $L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ nulle sur l'image de d''. Par dualité, il existe une section v de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ telle que

$$\Delta(\ ,v) = \alpha\,.$$

En particulier, pour toute section h de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$, on a

$$\Delta(d''h, v) = \int_X (d''h, v) = \alpha(d''h) = 0\,.$$

Il résulte alors du théorème de régularité (§ 1, théorème 2, corollaire) que v est holomorphe et l'on a

$$\alpha(u) = \Delta(u, v) = 0\,.$$

On conclut à l'aide du théorème de Hahn-Banach.

THÉORÈME 1. *Par restriction et passage au quotient, les bijections canoniques*

$$\Delta_1\colon\ L^2_c(X, \pi\otimes\Omega^{0,1}) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi^*\otimes\Omega^{1,0})'$$

et

$$\Delta_2\colon\ L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi\otimes\Omega^{0,1}) \to L^2_c(X, \pi^*\otimes\Omega^{1,0})'$$

induisent des bijections

$$\tilde{\Delta}_1\colon\ L^2_c(X, \pi\otimes\Omega^{0,1})/\overline{\mathrm{Im}\, d''} \to \mathcal{O}(X, \pi^*\otimes\Omega^{1,0})'$$

et

$$\tilde{\Delta}_2\colon\ L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi\otimes\Omega^{0,1})/\overline{\mathrm{Im}\, d''} \to \mathcal{O}_c(X, \pi^*\otimes\Omega^{1,0})' .$$

Il résulte de la proposition 1 que les applications $\tilde{\Delta}_1$ et $\tilde{\Delta}_2$ sont bien définies et injectives. Le théorème de Hahn-Banach montre qu'elles sont surjectives.

COROLLAIRE (Théorème de dualité). *(1) Si l'image de l'opérateur*

$$d''\colon\ H^1_c(X, \pi) \to L^2_c(X, \pi\otimes\Omega^{0,1})$$

est fermée, les espaces vectoriels $\mathbf{H}^1_c(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^0(X, \pi^*\otimes\Omega^{1,0})'$ *sont canoniquement isomorphes.*

(2) Si l'image de l'opérateur

$$d''\colon\ H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi\otimes\Omega^{0,1})$$

est fermée, les espaces vectoriels $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^0_c(X, \pi^*\otimes\Omega^{1,0})'$ *sont canoniquement isomorphes.*

Remarque 1.

Il résulte aisément du théorème du graphe fermé que les applications $\tilde{\Delta}_1$ et $\tilde{\Delta}_2$ du théorème 1 sont des isomorphismes.

PROPOSITION 2. *Pour toute partie compacte* K *de* X, *l'opérateur*

$$d''\colon\ H^1_K(X, \pi) \to L^2_K(X, \pi\otimes\Omega^{0,1})$$

a une image fermée et un noyau de dimension finie.

Désignons par j l'injection canonique de $H^1_K(X, \pi)$ dans $L^2_K(X, \pi)$ et considérons les applications linéaires continues

$$H^1_K(X, \pi) \overset{(j,d'')}{\underset{(-j,0)}{\rightrightarrows}} L^2_K(X, \pi) \oplus L^2_K(X, \pi\otimes\Omega^{0,1})$$

L'application (j, d'') est injective d'image fermée (§ 1, remarque 3). L'application $(-j, 0)$ est un opérateur compact en vertu du lemme de Rellich (chap. II, § 2, théorème 2). L'assertion est alors une conséquence immédiate d'un résultat classique sur les opérateurs compacts ([2], théorème (11.3.2) et problème (11.3.2)).

Corollaire (Théorème de finitude). *Si la courbe holomorphe* X *est compacte, l'image de l'opérateur*

$$d'' : H^1(X, \pi) \to L^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

est fermée. Les espaces $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$ *sont alors canoniquement isomorphes et les espaces* $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *sont de dimension finie.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 et du théorème de dualité.

§ 3. Le cas du Laplacien

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'opérateur différentiel

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right).$$

Soit X un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$. On dit qu'une fonction u de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{C})$ est *harmonique* si elle vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0 .$$

Il résulte de cette définition que u est harmonique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont harmoniques.

On désigne par $\mathscr{H}(X, \mathbf{k})$ (avec $\mathbf{k}$ égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) l'ensemble des fonctions harmoniques sur X à valeurs dans $\mathbf{k}$.

Remarquons que $\mathscr{H}(X, \mathbf{k})$ est une sous-algèbre fermée de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{k})$.

Proposition 1. *Supposons* X *simplement connexe. Pour qu'une fonction* u *de* $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{R})$ *soit harmonique, il faut et il suffit qu'elle soit la partie réelle d'une fonction holomorphe.*

La suffisance résulte de ce qui précède. Si u est harmonique, la forme différentielle $\frac{\partial u}{\partial z} dz$ est holomorphe, donc fermée. Il existe par conséquent une fonction holomorphe h sur X telle que

$$\frac{1}{2} dh = \frac{\partial u}{\partial z} dz$$