Chapitre III THÉORÈME DE DUALITÉ

CHAPITRE III

THÉORÈME DE DUALITÉ

§ 1. LEMME DE GROTHENDIECK

Pour tout couple d'entiers (j, k), on définit par récurrence un opérateur différentiel sur $\mathbf{C}$ en posant

$$\frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \, \partial \bar{z}^k} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^{j+k-1}}{\partial z^{j-1} \, \partial \bar{z}^k}\right) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial^{j+k-1}}{\partial z^j \, \partial \bar{z}^{k-1}}\right).$$

Pour tout entier m au moins égal à $j + k$ et pour tout ensemble ouvert X de $\mathbf{C}$, cet opérateur se prolonge en une application linéaire continue de $H^m_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ dans $H^{m-j-k}_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ que l'on désigne encore par $\dfrac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \, \partial \bar{z}^k}$.

Pour toute fonction u de $H^m_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ et toute fonction h de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$, on a la formule d'intégration par parties

$$\int_X \frac{\partial^{j+k} u}{\partial z^j \, \partial \bar{z}^k} \, h \, d\mu = (-1)^{j+k} \int_X u \, \frac{\partial^{j+k} h}{\partial z^j \, \partial \bar{z}^k} \, d\mu .$$

En effet, pour h fixé, les deux membres sont des formes linéaires continues sur $H^m_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ qui coïncident sur $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$.

Remarquons d'autre part que la topologie de $H^m_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ est définie par la famille de semi-normes

$$\| \quad \|_{m,K} = \max_{j+k \leq m} \left\| \frac{\partial^{j+k}}{\partial z^j \, \partial \bar{z}^k} \right\|_{L^2, K}$$

lorsque K parcourt l'ensemble des parties compactes de X.

LEMME 1. *Pour toute fonction u de $H^{m+1}_c(X, \mathbf{C})$, on a*

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_m = \left\| \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right\|_m .$$

Par récurrence, on se ramène immédiatement au cas où m est nul, par densité et continuité au cas où u appartient à $\mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{C})$. La formule d'intégration par parties montre alors que l'on a

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\|_{L^2}^2 = \int_X \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|^2 d\mu = \int_X \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}\, d\mu = -\int_X u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z\, \partial \bar{z}}\, d\mu$$

et

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right\|_{L^2}^2 = \int_X \left|\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right|^2 d\mu = \int_X \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\, d\mu = -\int_X u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}\, \partial z}\, d\mu$$

ce qui démontre l'assertion.

Remarque 1.

Il résulte en particulier du lemme 1 que l'on a

$$\| u \|_1 = \max\left(\| u \|_{L^2}, \left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\|_{L^2}\right)$$

pour toute fonction u de $H_c^1(X, \mathbf{C})$. Par conséquent, l'application

$$\left(j, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) : H_K^1(X, \mathbf{C}) \to L_K^2(X, \mathbf{C}) \oplus L_K^2(X, \mathbf{C})$$

où j désigne l'injection canonique est continue d'image fermée pour toute partie compacte K de X.

Rappelons que les fonctions k et $\bar{k}$ définies sur $\mathbf{C}^*$ par

$$k(z) = \frac{1}{\pi z} \qquad \text{et} \qquad \bar{k}(z) = \frac{1}{\pi \bar{z}}$$

appartiennent à $L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

Désignons par D le disque de rayon r et de centre 0 dans $\mathbf{C}$ et par α une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty(D, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0. On pose

$$\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \qquad \text{et} \qquad \alpha'' = \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}}\,.$$

Remarquons que les fonctions $\alpha'\bar{k}$ et $\alpha''k$ appartiennent à $\mathscr{C}_c^\infty(D, \mathbf{C})$. Par conséquent, si X et X' sont des ensembles ouverts de $\mathbf{C}$ tels que X contienne $X' + D$, le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$(\alpha k)* : L_{\mathrm{loc}}^1(X, \mathbf{C}) \to L_{\mathrm{loc}}^1(X', \mathbf{C}) \qquad \text{et} \qquad (\alpha \bar{k})* : L_{\mathrm{loc}}^1(X, \mathbf{C}) \to L_{\mathrm{loc}}^1(X', \mathbf{C})$$
$$(\alpha'' k)* : L_{\mathrm{loc}}^1(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C}) \qquad \text{et} \qquad (\alpha' \bar{k})* : L_{\mathrm{loc}}^1(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C})\,.$$

THÉORÈME 1 (Grothendieck). *Le produit de convolution induit des applications linéaires continues*

$$(\alpha k)*: L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to H^1_{\mathrm{loc}}(X', \mathbf{C}) \qquad et \qquad (\alpha \bar{k})*: L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to H^1_{\mathrm{loc}}(X', \mathbf{C})$$

et l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big((\alpha k)*u\big) = u\,|_{X'} + (\alpha'' k)*u \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\big((\alpha \bar{k})*u\big) = u\,|_{X'} + (\alpha' k)*u$$

pour toute fonction u *de* $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$.

Soit u une fonction de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. On sait que $(\alpha k)*u$ appartient à $\mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C})$ et l'on a

$$\big((\alpha k)*u\big)(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_X u(z)\,\alpha(\zeta - z)\,\frac{d\mu(z)}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi}\int_D u(\zeta + z)\,\alpha(-z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}$$

pour tout point ζ de X'. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big((\alpha k)*u\big)(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{D \setminus D_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(\zeta + z)\,\alpha(-z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}$$

où D_ε désigne le disque de centre 0 et de rayon ε. La formule de Stokes (chap. 0, § 4, théorème 2, corollaire) montre que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big((\alpha k)*u\big)(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D_\varepsilon} u(\zeta + z)\,\alpha(-z)\frac{dz}{z}$$
$$+ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{D \setminus D_\varepsilon} u(\zeta + z)\,\alpha''(-z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}.$$

On a d'autre part

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D_\varepsilon} u(\zeta + z)\,\alpha(-z)\frac{dz}{z} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta + \varepsilon e^{i\theta})\,\alpha(-\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta = u(\zeta)$$

et

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2i\pi}\int_{D \setminus D_\varepsilon} u(\zeta + z)\,\alpha''(-z)\,\frac{dz \wedge d\bar{z}}{z} = \frac{1}{\pi}\int_X u(z)\,\alpha''(\zeta - z)\,\frac{d\mu(z)}{\zeta - z}$$
$$= \big((\alpha'' k)*u\big)(\zeta)$$

ce qui démontre la formule dans ce cas.

Désignons par λ une fonction de $\mathscr{C}^\infty_c(X', \mathbf{R})$ et par K un ensemble compact de X contenant l'ensemble $\operatorname{supp}(\lambda) + D$. En vertu de ce qui précède, il existe des constantes c' et c'' telles que

$$\| \lambda((\alpha k)*u) \|_{L^2} \leqslant c' \| u \|_{L^2,K} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\lambda((\alpha k)*u)) \right\|_{L^2} \leqslant c'' \| u \|_{L^2,K}$$

pour toute fonction u de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. Ceci montre que l'application $(\alpha k)*$ de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C})$ est continue lorsque l'on munit la source de la topologie induite par $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ et le but de la topologie induite par $H^1_{\mathrm{loc}}(X', \mathbf{C})$ (remarque 1). Par densité et continuité, on en déduit le théorème pour l'application $(\alpha k)*$. L'assertion relative à $(\alpha \bar{k})*$ s'en déduit par conjugaison.

Remarque 2.

On montre de la même manière que le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$k* : L^2_c(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \to H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \bar{k}* : L^2_c(\mathbf{C}, \mathbf{C}) \to H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$$

et que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(k*u) = u \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z}(\bar{k}*u) = u$$

pour toute fonction u de $L^2_c(\mathbf{C}, \mathbf{C})$. En particulier, les applications induites par $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sur les germes à l'origine de fonctions continûment dérivables sont surjectives.

Soit X une courbe holomorphe et soit π un fibré vectoriel holomorphe sur X.

L'opérateur d'' se prolonge en une application continue de $H^{m+1}_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ dans $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$. Pour toute section u de $H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ et toute section h de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$, on a la formule d'intégration par parties

$$\int_X (d''u, h) = - \int_X (u, d''h) \quad ^{1)}.$$

En effet, pour h fixé, les deux membres sont des formes linéaires continues sur $H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ qui coïncident sur $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ (chap. 0, § 4, théorème 2, corollaire et chap. I, § 2, lemme 5).

Remarque 3.

L'application

$$(j, d'') : H^1_K(X, \pi) \to L^2_K(X, \pi) \oplus L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

---

[1]) Les notations sont celles de chap. 0, § 4, exemple 1.

où j désigne l'injection canonique est continue d'image fermée pour toute partie compacte K et X. C'est une conséquence immédiate des définitions et de la remarque 1.

THÉORÈME 2. *On désigne par u une section de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi)$ et par m un entier naturel. S'il existe une section v de $H^m_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ telle que*

$$\int_X (v, h) = -\int_X (u, d''h)$$

pour toute section h de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$, alors u appartient à $H^{m+1}_{\text{loc}}(X, \pi)$.

La question étant locale, on se ramène immédiatement au cas où X est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$ et π le fibré produit $\mathbf{C}_X$. L'hypothèse signifie donc que la dérivée faible $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ existe et appartient à $H^m_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$. Désignons par X' un ensemble ouvert relativement compact dans X, par D un disque de centre 0 tel que X contienne $X' + D$ et par α une fonction de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0. Il résulte du théorème 1 que l'on a

$$u\,|_{X'} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}((\alpha k) * u) - (\alpha'' k) * u = (\alpha k) * \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - (\alpha'' k) * u\,.$$

Par récurrence sur m, il résulte de ce même théorème que $u\,\big|_{X'}$ appartient à $H^{m+1}_{\text{loc}}(X', \mathbf{C})$, ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE (Théorème de régularité). *On conserve les notations et les hypothèses du théorème 2. Si v est indéfiniment dérivable, il en est de même de u. En particulier, si v est nulle, la section u est holomorphe.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 2 et du lemme de Sobolev (chap. II, § 2, théorème 1, corollaire).

LEMME 2. *Pour tout point x de X, il existe des voisinages ouverts U et V de x et une application linéaire continue P de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H^1_{\text{loc}}(U, \pi)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) Pour toute section u de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$, la section

$$u\,|_U - (d'' \cdot P)(u)$$

est indéfiniment dérivable.

(2) L'application P s'annule sur l'ensemble des sections de $L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dont la restriction à V est nulle.

La question étant locale, on peut supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$ et que π est le fibré produit $\mathbf{C}^p_X$. On désigne par V un voisinage ouvert de x dans X, par U un voisinage ouvert relativement compact de x dans V et par D un disque centré à l'origine tel que V contienne $U + D$. Toute section u de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ s'écrit

$$u = (u_1, \ldots, u_p)\, d\bar{z}$$

où $u_1, \ldots, u_p$ sont des fonctions de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$. Il suffit de poser

$$P(u) = \big((\alpha k) * u_1, \ldots, (\alpha k) * u_p\big)$$

où α est une fonction de $\mathscr{C}^\infty_c(D, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de 0 (théorème 1).

THÉORÈME 3. *Il existe une application linéaire continue* P *de* $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ *dans* $H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) Pour toute section u *de* $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$, *la section*

$$u - (d'' \cdot P)(u)$$

est indéfiniment dérivable.

(2) Si u *est à support compact, il en est de même de* $P(u)$.

Il existe deux recouvrements ouverts localement finis $(U_\iota)_{\iota \in I}$ et $(V_\iota)_{\iota \in I}$ de X, tels que U_ι soit relativement compact dans V_ι et V_ι relativement compact dans X et, pour chaque indice ι, une application linéaire continue P_ι de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H^1_{\mathrm{loc}}(U_\iota, \pi)$ vérifiant les conditions du lemme 2. On désigne par $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_{\iota \in I}$.

Pour toute section u de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ et pour tout couple (ι, κ) d'indices la section

$$v_{\kappa\iota} = P_\iota(u) - P_\kappa(u)$$

est indéfiniment dérivable sur $U_\iota \cap U_\kappa$ (théorème de regularité). On désigne par $\tilde{v}_{\kappa\iota}$ la section de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \pi)$ obtenue en prolongeant $\alpha_\kappa v_{\kappa\iota}$ par 0 et l'on pose

$$v_\iota = \sum_{\kappa \in I \setminus \{\iota\}} \tilde{v}_{\kappa\iota}$$

(chap. 0, § 2, lemme 1). On a

$$v_\iota - v_\kappa = v_{\kappa\iota} = P_\iota(u) - P_\kappa(u),$$

et par conséquent les sections $P_\iota(u) - v_\iota$ se recollent en une section $P(u)$ de $H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$. Il est clair que P est linéaire continue et l'on a

$$u\,|_{U_\iota} - (d'' \cdot P)(u)\,|_{U_\iota} = u\,|_{U_\iota} - (d'' \cdot P_\iota)(u) + d'' v_\iota$$

ce qui démontre (1).

Pour démontrer (2), il suffit de remarquer que le support de $P(u)$ est contenu dans $\bigcup_{\iota\in I'} U_\iota$

$$I' = \{\, \iota \in I \mid \text{il existe } \kappa \in I \text{ tel que } U_\iota \cap U_\kappa \neq \varnothing \text{ et } V_\kappa \cap \operatorname{supp}(u) \neq \varnothing \,\}.$$

Ceci résulte aisément de la construction et de ce que $P_\iota(u)$ est nul chaque fois que le support de u ne rencontre pas V_ι.

On appelle *paramétrix* de d'' toute application linéaire continue P vérifiant les conditions du théorème 3.

Si P est une paramétrix de d'', le théorème de régularité montre que $P(u)$ est indéfiniment dérivable si u l'est. De même, pour toute section v de $H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ la section

$$v - (P \cdot d'')(v)$$

est indéfiniment dérivable.

Il résulte d'autre part du théorème du graphe fermé que les applications linéaire

$$1 - d'' \cdot P\colon L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \to \mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

et

$$1 - P \cdot d''\colon H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi) \to \mathscr{C}^\infty(X, \pi),$$

$$1 - d'' \cdot P\colon L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \to \mathscr{C}^\infty_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

et

$$1 - P \cdot d''\colon H^1_c(X, \pi) \to \mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$$

sont continues.

Proposition 1. *(1) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ et $\mathscr{C}^\infty(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ et $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ respectivement induisent des isomorphismes de $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ et $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ sur le noyau et le conoyau de l'application*

$$d''\colon H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}).$$

(2) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ et $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ dans $H^1_c(X, \pi)$ et $L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ respectivement induisent des isomorphismes de $\mathbf{H}^0_c(X, \pi)$ et $\mathbf{H}^1_c(X, \pi)$ sur le noyau et le conoyau de l'application

$$d''\colon H^1_c(X, \pi) \to L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}).$$

C'est une conséquence immédiate de l'existence d'une paramétrix.

§ 2. Dualité

On désigne toujours par X une courbe holomorphe et par π un fibré vectoriel holomorphe sur X.

Rappelons que l'on a deux dualités canoniques d'espaces vectoriels topologiques (chap. 0, § 4, exemple 1)

$$\Delta : L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \times L_{\mathrm{loc}}^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \to \mathbf{C}$$

et

$$\Delta : L_{\mathrm{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \times L_c^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \to \mathbf{C}\,.$$

L'ensemble des sections holomorphes (resp. holomorphes à support compact) de $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$ s'identifie à un sous-espace fermé de $L_{\mathrm{loc}}^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ (resp. $L_c^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$).

Proposition 1. *Pour qu'une section* u *de* $L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ *(resp.* $L_{\mathrm{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$*) soit adhérente à l'image de l'opérateur*

$$d'' : H_c^1(X, \pi) \to L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

$$(\text{resp. } d'' : H_{\mathrm{loc}}^1(X, \pi) \to L_{\mathrm{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}))$$

il faut et il suffit qu'elle soit Δ*-orthogonale au sous-espace* $\mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ *(resp.* $\mathcal{O}_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$*).*

Pour toute section h de $H_c^1(X, \pi)$ et toute section v de $\mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$, on a

$$\Delta(d''h, v) = \int_X (d''h, v) = -\int_X (h, d''v) = 0\,,$$

ce qui montre la nécessité de la condition puisque la forme bilinéaire Δ est séparément continue.

Réciproquement, désignons par α une forme linéaire continue sur $L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ nulle sur l'image de d''. Par dualité, il existe une section v de $L_{\mathrm{loc}}^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ telle que

$$\Delta(\ ,v) = \alpha\,.$$

En particulier, pour toute section h de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \pi)$, on a

$$\Delta(d''h, v) = \int_X (d''h, v) = \alpha(d''h) = 0\,.$$

Il résulte alors du théorème de régularité (§ 1, théorème 2, corollaire) que v est holomorphe et l'on a

$$\alpha(u) = \Delta(u, v) = 0\,.$$

On conclut à l'aide du théorème de Hahn-Banach.

THÉORÈME 1. *Par restriction et passage au quotient, les bijections canoniques*

$$\Delta_1 \colon\ L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \to L^2_{\text{loc}}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$$

et

$$\Delta_2 \colon\ L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \to L^2_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$$

induisent des bijections

$$\tilde{\Delta}_1 \colon\ L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})/\overline{\operatorname{Im} d''} \to \mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$$

et

$$\tilde{\Delta}_2 \colon\ L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})/\overline{\operatorname{Im} d''} \to \mathcal{O}_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})' \,.$$

Il résulte de la proposition 1 que les applications $\tilde{\Delta}_1$ et $\tilde{\Delta}_2$ sont bien définies et injectives. Le théorème de Hahn-Banach montre qu'elles sont surjectives.

COROLLAIRE (Théorème de dualité). *(1) Si l'image de l'opérateur*

$$d'' \colon\ H^1_c(X, \pi) \to L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

est fermée, les espaces vectoriels $\mathbf{H}^1_c(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$ *sont canoniquement isomorphes.*

(2) Si l'image de l'opérateur

$$d'' \colon\ H^1_{\text{loc}}(X, \pi) \to L^2_{\text{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

est fermée, les espaces vectoriels $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^0_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$ *sont canoniquement isomorphes.*

Remarque 1.

Il résulte aisément du théorème du graphe fermé que les applications $\tilde{\Delta}_1$ et $\tilde{\Delta}_2$ du théorème 1 sont des isomorphismes.

PROPOSITION 2. *Pour toute partie compacte K de X, l'opérateur*

$$d'' \colon\ H^1_K(X, \pi) \to L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

a une image fermée et un noyau de dimension finie.

Désignons par j l'injection canonique de $H^1_K(X, \pi)$ dans $L^2_K(X, \pi)$ et considérons les applications linéaires continues

$$H^1_K(X, \pi) \underset{(-j,0)}{\overset{(j,d'')}{\rightrightarrows}} L^2_K(X, \pi) \oplus L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

L'application (j, d'') est injective d'image fermée (§ 1, remarque 3). L'application $(-j, 0)$ est un opérateur compact en vertu du lemme de Rellich (chap. II, § 2, théorème 2). L'assertion est alors une conséquence immédiate d'un résultat classique sur les opérateurs compacts ([2], théorème (11.3.2) et problème (11.3.2)).

COROLLAIRE (Théorème de finitude). *Si la courbe holomorphe X est compacte, l'image de l'opérateur*

$$d'': H^1(X, \pi) \to L^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

est fermée. Les espaces $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$ *sont alors canoniquement isomorphes et les espaces* $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *sont de dimension finie.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 et du théorème de dualité.

§ 3. Le cas du Laplacien

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'opérateur différentiel

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right).$$

Soit X un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$. On dit qu'une fonction u de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{C})$ est *harmonique* si elle vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0 .$$

Il résulte de cette définition que u est harmonique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont harmoniques.

On désigne par $\mathscr{H}(X, \mathbf{k})$ (avec $\mathbf{k}$ égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) l'ensemble des fonctions harmoniques sur X à valeurs dans $\mathbf{k}$.

Remarquons que $\mathscr{H}(X, \mathbf{k})$ est une sous-algèbre fermée de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{k})$.

PROPOSITION 1. *Supposons X simplement connexe. Pour qu'une fonction u de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{R})$ soit harmonique, il faut et il suffit qu'elle soit la partie réelle d'une fonction holomorphe.*

La suffisance résulte de ce qui précède. Si u est harmonique, la forme différentielle $\frac{\partial u}{\partial z} dz$ est holomorphe, donc fermée. Il existe par conséquent une fonction holomorphe h sur X telle que

$$\frac{1}{2} dh = \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

(chap. 0, § 5, théorème 1, corollaire 1). On en déduit que

$$\frac{1}{2}\, d(h+\bar{h}) = \frac{\partial u}{\partial z}\, dz + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z} = du$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE 1 (Principe du prolongement analytique). *Soit u une fonction harmonique sur un ensemble ouvert connexe X de $\mathbf{C}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) La fonction u est identiquement nulle.

(2) Il existe un point de X ou le germe de u est nul.

(3) Il existe un point de X où toutes les dérivées partielles de u sont nulles.

Il suffit de montrer que (3) implique (1). On peut supposer u à valeurs réelles. On désigne par ζ un point de X où toutes les dérivées partielles de u sont nulles et par h une fonction holomorphe telle que

$$u = \operatorname{Re}(h) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial z}$$

au voisinage de ζ. On en déduit que h est constante, purement imaginaire, et que u est nulle au voisinage de ζ, ce qui établit l'assertion.

COROLLAIRE 2 (Propriété de la moyenne). *Soit u une fonction harmonique sur un ensemble ouvert X de $\mathbf{C}$ et soit D un disque de centre ζ relativement compact dans X. On a*

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} u(z)\, dz\ .$$

On peut supposer u à valeurs réelles. L'assertion est alors une conséquence immédiate de la proposition 1 et de la formule de Cauchy (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 1).

COROLLAIRE 3. *Pour tout ensemble ouvert X de $\mathbf{C}$, les topologies induites sur $\mathscr{H}(X, \mathbf{k})$ par $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{k})$ et $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{k})$ coïncident.*

La démonstration est analogue à celle du théorème de Weierstrass (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4).

COROLLAIRE 4 (Principe du maximum). *Soit u une fonction harmonique sur un ensemble ouvert connexe X de $\mathbf{C}$. Si u possède un maximum relatif en un point ζ de X, elle est constante.*

En vertu du principe du prolongement analytique, il suffit de montrer que u est constante au voisinage de ζ. Quitte à multiplier u par une constante convenable, on peut supposer $u(\zeta)$ réel positif. Pour r suffisamment petit, on a par hypothèse

$$M(r) = \sup_{|z-\zeta|=r} |u(z)| \leqslant u(\zeta).$$

Réciproquement, la propriété de moyenne montre que $u(\zeta)$ est majoré par $M(r)$. Ceci montre que la fonction g définie par

$$g(z) = \operatorname{Re}\big(u(\zeta) - u(z)\big)$$

est réelle positive. Elle s'annule en un point z si et seulement si $u(z)$ est égal à $u(\zeta)$. On conclut en remarquant que l'intégrale de g sur le bord du disque de centre ζ et de rayon r est nulle.

LEMME 1. *Soit l la fonction définie sur* $\mathbf{C}^*$ *par la formule*

$$l(z) = \frac{1}{\pi} \log |z|^2 .$$

(1) La fonction l appartient à $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

(2) La fonction l est faiblement dérivable d'ordre $(1, 0)$ *et* $(0, 1)$. *On a*

$$\frac{\partial l}{\partial z} = \frac{1}{\pi z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial l}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\pi \bar{z}} .$$

La première assertion découle d'un calcul élémentaire en coordonnées polaires. Démontrons la seconde. Pour toute fonction h de $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbf{C}, \mathbf{C})$, on a

$$\int_{\mathbf{C}} kh \, d\mu = -\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbf{C} \setminus D_\varepsilon} \frac{\partial l}{\partial z} h \, dz \wedge d\bar{z}$$

(on utilise les notations du paragraphe 1). La formule de Stokes montre alors que l'on a

$$\int_{\mathbf{C}} kh \, d\mu = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} lh \, d\bar{z} + \frac{1}{2i} \int_{\mathbf{C}} l \frac{\partial h}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} .$$

On conclut en remarquant que l'on a

$$\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} lh \, d\bar{z} = 0 .$$

L'autre assertion se démontre de la même manière.

Désignons par D le disque de centre 0 et de rayon r dans $\mathbf{C}$ et par α une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty$ (D, **R**) égale à 1 au voisinage de 0. On pose

$$\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \qquad \alpha'' = \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} \qquad \beta = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \partial \bar{z}} .$$

Si X et X' sont des ensembles ouverts de $\mathbf{C}$ tels que X contienne $X' + D$, le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$(\alpha l)*\colon\ L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^0(X', \mathbf{C}) \qquad \text{et} \qquad (\beta l)*\colon\ L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C})$$

Proposition 2. *Le produit de convolution induit une application linéaire continue*

$$(\alpha l)*\colon\ L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to H^2_{\mathrm{loc}}(X', \mathbf{C})$$

et l'on a

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}\big((\alpha l)*u\big) = u\,|_{X'} + (\alpha' \bar{k} + \alpha'' k + \beta l)*u$$

pour toute fonction u *de* $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$.

Il résulte du lemme 1 que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial z}\big((\alpha l)*u\big) = (\alpha' l)*u + (\alpha k)*u \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big((\alpha l)*u\big) = (\alpha'' l)*u + (\alpha \bar{k})*u .$$

La première assertion résulte donc du lemme de Grothendieck. Ce même lemme montre que l'on a

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}\big((\alpha l)*u\big) = u\,|_{X'} + (\alpha' \bar{k} + \alpha'' k + \beta l)*u$$

ce qui démontre l'assertion.

Soit X une courbe holomorphe.

On désigne par $\mathscr{H}^0(X)$ et $\mathscr{H}^1(X)$ le noyau et le conoyau de l'application

$$d' \cdot d'' :\ \mathscr{C}(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}(X, \Omega^{1,1}) ,$$

par $\mathscr{H}^0_c(X)$ et $\mathscr{H}^1_c(X)$ le noyau et le conoyau de l'application

$$d' \cdot d'' :\ \mathscr{C}_c(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}_c(X, \Omega^{1,1}) .$$

Remarquons que l'ensemble $\mathscr{H}^0(X)$ s'identifie à l'ensemble des fonctions harmoniques sur X (i.e. les fonctions dont l'expression dans toute carte est harmonique). En particulier, l'espace $\mathscr{H}^0(X)$ est réduit aux fonctions localement constantes si X est compacte (principe du maximum), l'espace $\mathscr{H}^0_c(X)$ est nul si X est ouverte (principe du prolongement analytique).

On peut développer pour l'opérateur $d' \cdot d''$ une théorie semblable à celle développée aux paragraphes précédents pour l'opérateur d''. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats: les démonstrations sont laissées en exercice au lecteur.

THÉORÈME 1. *On désigne par* u *une fonction de* $L^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ *et par* m *un entier naturel. S'il existe une forme différentielle* v *de* $H^m_{\text{loc}}(X, \Omega^{1,1})$ *telle que*

$$\int_X hv = \int_X u\,(d'\cdot d'')(h)$$

pour toute fonction h *de* $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$, *alors* u *appartient à* $H^{m+2}_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$.

COROLLAIRE (Théorème de régularité). *On conserve les notations et les hypothèses du théorème 1. Si* v *est indéfiniment dérivable, il en est de même de* u. *En particulier, si* v *est nulle, la fonction* u *est harmonique.*

On appelle *paramétrix de* $d' \cdot d''$ toute application linéaire continue P de $L^2_{\text{loc}}(X, \Omega^{1,1})$ dans $H^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ vérifiant les conditions suivantes

(1) Pour toute forme différentielle u de $L^2_{\text{loc}}(X, \Omega^{1,1})$, la forme différentielle

$$u - (d'\cdot d''\cdot P)(u)$$

est indéfiniment dérivable.

(2) Si u est à support compact, il en est de même de $P(u)$.

Les propriétés suivantes sont alors des conséquences du théorème de régularité:

(3) Si u est indéfiniment dérivable, il en est de même de $P(u)$.

(4) Pour toute fonction v de $H^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$, la fonction

$$v - (P\cdot d'\cdot d'')(u)$$

est indéfiniment dérivable.

THÉORÈME 2. *L'opérateur* $d' \cdot d''$ *possède une paramétrix.*

COROLLAIRE. *(1) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de* $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ *et* $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$ *dans* $H^2_{\text{loc}}(X, \mathbf{C})$ *et* $L^2_{\text{loc}}(X, \Omega^{1,1})$

respectivement induisent des bijections de $\mathscr{H}^0(X)$ *et* $\mathscr{H}^1(X)$ *sur le noyau et le conoyau de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1}) .$$

(2) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$ *et* $\mathscr{C}^\infty_c(X, \Omega^{1,1})$ *dans* $H^2_c(X, \mathbf{C})$ *et* $L^2_c(X, \Omega^{1,1})$ *respectivement induisent des bijections de* $\mathscr{H}^0_c(X)$ *et* $\mathscr{H}^1_c(X)$ *sur le noyau et le conoyau de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^2_c(X, \mathbf{C}) \to L^2_c(X, \Omega^{1,1}) .$$

Considérons les dualités canoniques d'espaces vectoriels topologiques

$$\Delta : L^2_c(X, \Omega^{1,1}) \times L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$$

et

$$\Delta : L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1}) \times L^2_c(X, \mathbf{C}) \to \mathbf{C} .$$

L'ensemble des fonctions harmoniques (resp. harmoniques à support compact) sur X s'identifie à un sous-espace fermé de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ (resp. $L^2_c(X, \mathbf{C})$).

PROPOSITION 3. *Pour qu'une forme différentielle* u *de* $L^2_c(X, \Omega^{1,1})$ *(resp.* $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})$*) soit adhérente à l'image de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^2_c(X, \mathbf{C}) \to L^2_c(X, \Omega^{1,1})$$

$$(\textit{resp. } d' \cdot d'' : H^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})) ,$$

il faut et il suffit qu'elle soit Δ*-orthogonale au sous-espace* $\mathscr{H}^0(X)$ *(resp.* $\mathscr{H}^0_c(X)$*).*

THÉORÈME 3 (Théorème de dualité). *(1) Si l'image de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^2_c(X, \mathbf{C}) \to L^2_c(X, \Omega^{1,1})$$

est fermée, les espaces vectoriels $\mathscr{H}^1_c(X)$ *et* $\mathscr{H}^0(X)'$ *sont canoniquement isomorphes.*

(2) Si l'image de l'opérateur

$$d' \cdot d'' : H^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})$$

est fermée, les espaces vectoriels $\mathscr{H}^1(X)$ *et* $\mathscr{H}^0_c(X)'$ *sont canoniquement isomorphes.*

Remarque 1.

Pour toute partie compacte K de X, l'application

$$(j_1, j_2 \cdot d'', d' \cdot d'') : \ H_K^2(X, \mathbf{C}) \to L_K^2(X, \mathbf{C}) \oplus L_K^2(X, \Omega^{0,1}) \oplus L_K^2(X, \Omega^{1,1})$$

où j_1 et j_2 désignent les injections canoniques de $H_K^2(X, \mathbf{C})$ dans $L_K^2(X, \mathbf{C})$ et de $H_K^1(X, \Omega^{0,1})$ dans $L_K^2(X, \Omega^{0,1})$ respectivement, est injective d'image fermée (§ 1, lemme 1).

PROPOSITION 4. *Pour toute partie compacte K de X, l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : \ H_K^2(X, \mathbf{C}) \to L_K^2(X, \Omega^{1,1})$$

a une image fermée et un noyau de dimension finie.

En particulier, si X est compacte connexe, l'intégration des formes différentielles de degré 2 induit un isomorphisme de $\mathscr{H}^1(X)$ sur $\mathbf{C}$.