

§ 5. COHOMOLOGIE DES SURFACES

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Il existe pour tout indice i une forme u_i de $\mathcal{C}^\infty(U_i, \Omega_C^1)$ telle que

$$u_{\kappa i} = u_i - u_\kappa$$

en tout point de $U_i \cap U_\kappa$ (§ 2, lemme 1). En particulier, puisque $u_{\kappa i}$ est fermée, les différentielles du_i se recollent en une forme fermée v homogène de degré 2.

Montrons que la classe de v dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ ne dépend que de g . En effet, si l'on a

$$u_{\kappa i} = u'_i - u'_\kappa$$

pour certaines formes u'_i de $\mathcal{C}^\infty(U_i, \Omega_C^1)$, les formes du'_i se recollent en une forme v' de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_C^2)$, les $u'_i - u_i$ en une forme u de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_C^1)$ et l'on a

$$v' = v + du$$

ce qui démontre l'assertion.

La classe de $-v$ dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ s'appelle la *classe de Chern de g* et se désigne par $\text{ch}(g)$.

LEMME 3. *Pour tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de X , la classe de Chern induit un homomorphisme de $\text{Pic}(\mathcal{U}, \mathbf{C}^*)$ dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$. Si \mathcal{V} est un recouvrement ouvert de X plus fin que \mathcal{U} , le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(\mathcal{U}, \mathbf{C}^*) & \xrightarrow{\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{U})} & \text{Pic}(\mathcal{V}, \mathbf{C}^*) \\ \text{ch} \searrow & & \swarrow \text{ch} \\ & \mathbf{H}^2(X, \mathbf{C}) & \end{array}$$

La démonstration est laissée en exercice au lecteur.

Par passage à la limite inductive, on obtient donc un homomorphisme canonique ch de $\text{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$. On appelle *classe de Chern d'un fibré en droites complexes π sur X* et l'on désigne par $\text{ch}(\pi)$ la classe de Chern du fibré principal associé à π (§ 2, scholie).

§ 5. COHOMOLOGIE DES SURFACES

Dans tout ce paragraphe, on désigne par X une surface différentielle connexe et orientée.

Désignons par γ une application indéfiniment dérivable définie sur un ensemble ouvert W de \mathbf{R} à valeurs dans X , et par u une forme différentielle de $\mathcal{C}^0(X, \Omega_C^1)$. Il est clair que la restriction de $\gamma^*(u)$ à tout intervalle fermé de W ne dépend que de la restriction de γ à cet intervalle.

On dit qu'un chemin c de X défini sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de \mathbf{R} est *dérivable* s'il existe un intervalle ouvert W contenant $[a, b]$ et une application γ indéfiniment dérivable de W dans X prolongeant c . Pour toute forme différentielle u de $\mathcal{C}^0(X, \Omega_C^1)$, on désigne par $c^*(u)$ la restriction de $\gamma^*(u)$ à $[a, b]$.

On appelle *intégrale de u sur c* le nombre complexe défini par

$$\int_c u = \int_a^b c^*(u).$$

On définit ainsi une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0(X, \Omega_C^1)$, réelle sur les formes différentielles réelles. De plus, si h est une application dérivable à dérivée positive d'un intervalle fermé borné sur $[a, b]$, on a

$$\int_{c \circ h} u = \int_c u.$$

Autrement dit l'intégrale de u sur c ne dépend pas de la paramétrisation de c . Enfin, pour toute fonction f de $\mathcal{C}^1(X, \mathbf{C})$, on a

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a)).$$

Désignons maintenant par u une forme fermée de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_C^1)$. Le lemme de Poincaré (§ 3, proposition 1) montre qu'il existe un recouvrement ouvert $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de X et, pour chaque indice ι , une fonction f_ι de $\mathcal{C}^\infty(U_\iota, \mathbf{C})$ telle que

$$u|_{U_\iota} = df_\iota$$

D'autre part, la compacité de l'intervalle $[a, b]$ montre qu'il existe une suite de nombres réels

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} = b$$

et pour tout entier j compris entre 0 et n un indice $\tau(j)$ tel que $U_{\tau(j)}$ contienne l'image par c de l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$. Une telle suite est dite *subordonnée au recouvrement* $(U_\iota)_{\iota \in I}$. Une telle application est dite de *subordination*.

On a alors

$$\int_c u = \sum_{0 \leq j \leq n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} c^*(u) = \sum_{0 \leq j \leq n} f_{\tau(j)}(c(t_{j+1})) - f_{\tau(j)}(c(t_j)).$$

Si c est un chemin quelconque de X (continu mais non nécessairement dérivable), et si u est fermée, le membre de droite est toujours défini. Nous allons voir qu'il est indépendant des différents choix que nous avons faits.

Tout d'abord, il est indépendant de τ : désignons par σ une autre application de subordination de $\{0, \dots, n\}$ dans I . Pour tout entier j compris entre 0 et n , l'image par c de l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ est contenue dans une composante

connexe de $U_{\tau(j)} \cap U_{\sigma(j)}$, d'où l'assertion puisque la fonction $f_{\tau(j)} - f_{\sigma(j)}$ est constante sur cette composante connexe.

Pour tout nombre réel t compris entre t_j et t_{j+1} , la suite

$$a = t_0 \leq \dots \leq t_j \leq t \leq t_{j+1} \leq \dots \leq t_{n+1} = b$$

est encore subordonnée au recouvrement $(U_\nu)_{\nu \in I}$ et la somme correspondante ne change pas. On en déduit que cette somme est indépendante de la suite subordonnée au recouvrement $(U_\nu)_{\nu \in I}$.

Finalement, désignons par $(V_\kappa)_{\kappa \in K}$ un deuxième recouvrement ouvert de X et, pour chaque indice κ , par g_κ une fonction de $\mathcal{C}^\infty(V_\kappa, \mathbb{C})$ telle que

$$u|_{V_\kappa} = dg_\kappa.$$

Il existe une suite

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n+1} = b$$

subordonnée aux deux recouvrements. On désigne par τ (resp. σ) une application de subordination de $\{0, \dots, n\}$ dans I (resp. K). Pour tout entier j compris entre 0 et n , l'image par c de l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$ est contenue dans une composante connexe de $U_{\tau(j)} \cap V_{\sigma(j)}$ et l'on conclut en remarquant que $f_{\tau(j)} - g_{\sigma(j)}$ est constante sur cette composante connexe.

Pour tout chemin c de X et toute forme fermée u de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_{\mathbb{C}}^1)$, on pose

$$\int_c u = \sum_{0 \leq j \leq n} f_{\tau(j)}(c(t_{j+1})) - f_{\tau(j)}(c(t_j)).$$

Cette définition coïncide avec la précédente si c est dérivable. Pour toute application continue et croissante h d'un intervalle fermé borné sur $[a, b]$, on a

$$\int_{c \cdot h} u = \int_c u.$$

De plus, pour toute fonction f de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$, on a

$$\int_c df = f(c(b)) - f(c(a));$$

enfin, si c' est un deuxième chemin de X ayant pour origine l'extrémité de c , on a

$$\int_{cc'} u = \int_c u + \int_{c'} u.$$

LEMME 1. Soient c_0 et c_1 deux chemins homotopes de X . On a alors

$$\int_{c_0} u = \int_{c_1} u$$

pour toute forme différentielle fermée u de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_{\mathbb{C}}^1)$.

On peut toujours supposer que c_0 et c_1 sont définis sur l'intervalle $[0, 1]$ et l'on désigne par Γ une homotopie de c_0 vers c_1 , i.e. une application continue du carré

$$C = \{ (s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq s \leq 1 \text{ et } 0 \leq t \leq 1 \}$$

dans X vérifiant les conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \Gamma(s, 0) &= c_0(s) & \text{et} & & \Gamma(s, 1) &= c_1(s) \\ \Gamma(0, t) &= c_0(0) = c_1(0) & \text{et} & & \Gamma(1, t) &= c_0(1) = c_1(1). \end{aligned}$$

Il existe un recouvrement ouvert $(U_\nu)_{\nu \in I}$ de X et, pour chaque indice ν , une fonction f_ν de $\mathcal{C}^\infty(U_\nu, \mathbf{C})$ telle que

$$u|_{U_\nu} = df_\nu.$$

Par compacité, il existe deux suites de nombres réels

$$\begin{aligned} 0 &= s_0 \leq \dots \leq s_{n+1} = 1 \\ 0 &= t_0 \leq \dots \leq t_{m+1} = 1 \end{aligned}$$

et pour tout couple d'entiers (j, k) un indice $\tau(j, k)$ tel que l'image par Γ du rectangle

$$\{ (s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid s_j \leq s \leq s_{j+1} \text{ et } t_k \leq t \leq t_{k+1} \}$$

soit contenue dans $U_{\tau(j,k)}$. Pour tout entier k compris entre 0 et m , la restriction de Γ à $[0, 1] \times \{t_k\}$ est un chemin γ_k de X et il suffit de montrer que l'on a

$$\int_{\gamma_k} u = \int_{\gamma_{k+1}} u.$$

Or, pour tout entier j compris entre 1 et $n+1$, l'image par Γ de l'ensemble

$$\{s_j\} \times [t_k, t_{k+1}]$$

est contenue dans une composante connexe de $U_{\tau(j-1,k)} \cap U_{\tau(j,k)}$. On en déduit que

$$f_{\tau(j-1,k)}(\gamma_k(s_j)) - f_{\tau(j,k)}(\gamma_k(s_j)) = f_{\tau(j-1,k)}(\gamma_{k+1}(s_j)) - f_{\tau(j,k)}(\gamma_{k+1}(s_j)).$$

Par sommation, et en utilisant le fait que γ_k et γ_{k+1} ont mêmes extrémités, on voit que l'on a

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq j \leq n} f_{\tau(j,k)}(\gamma_k(s_{j+1})) - f_{\tau(j,k)}(\gamma_k(s_j)) \\ &= \sum_{0 \leq j \leq n} f_{\tau(j,k)}(\gamma_{k+1}(s_{j+1})) - f_{\tau(j,k)}(\gamma_{k+1}(s_j)) \end{aligned}$$

ce qui établit l'assertion.

Désignons par \mathbf{C}^* le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls et par \mathbf{U} le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1. On appelle *support d'une fonction continue à valeurs dans \mathbf{C}^* (ou \mathbf{U})* le plus petit ensemble fermé en dehors duquel elle est égale à 1.

On désigne par $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{U})$) le groupe multiplicatif des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ à valeurs dans \mathbf{C}^* (resp. \mathbf{U}) et par $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ (resp. $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{U})$) le sous-groupe formé de celles à support compact.

L'application exponentielle induit des homomorphismes

$$\exp 2i\pi : \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*) \quad \text{et} \quad \exp 2i\pi : \mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C}^*)$$

$$\exp 2i\pi : \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{U}) \quad \text{et} \quad \exp 2i\pi : \mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{U}).$$

On dit qu'une fonction de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ *possède un logarithme* si elle est dans l'image de l'application exponentielle.

Pour toute fonction f de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$, la forme différentielle $\frac{1}{2i\pi} \frac{df}{f}$ s'appelle la *différentielle logarithmique de f* . Elle est réelle si f est à valeurs dans \mathbf{U} , à support compact si f est à support compact. Puisqu'elle est fermée, on a des applications canoniques

$$\delta : \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*) \rightarrow \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \delta : \mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C}^*) \rightarrow \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{C})$$

$$\delta : \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{U}) \rightarrow \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \delta : \mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{U}) \rightarrow \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R}).$$

On vérifie aisément que ce sont des homomorphismes.

LEMME 2. *Considérons les deux diagrammes commutatifs de groupes abéliens et d'homomorphismes*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{R}) & \xrightarrow{\exp 2i\pi} & \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{U}) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) & & \\ \cap & & \cap & & \downarrow \theta & & \\ \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C}) & \xrightarrow{\exp 2i\pi} & \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{H}^1(X, \mathbf{C}) & & \\ \\ \mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{R}) & \xrightarrow{\exp 2i\pi} & \mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{U}) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R}) & & \\ \cap & & \cap & & \downarrow \theta & & \\ \mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C}) & \xrightarrow{\exp 2i\pi} & \mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C}^*) & \xrightarrow{\delta} & \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{C}) & & \end{array}$$

Les lignes sont exactes et θ induit un isomorphisme sur les images de δ .

Pour toute fonction f de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C})$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{d(\exp 2i\pi f)}{\exp 2i\pi f} = df$$

ce qui montre que le composé des deux homomorphismes est nul. D'autre part, si g est une fonction de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ telle que

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{dg}{g} = df,$$

on voit que $g \exp(-2i\pi f)$ est constante, ce qui montre que les lignes sont exactes.

Montrons que l'application induite par θ est injective. Si g est à valeurs dans \mathbf{U} , et si l'on a

$$\exp 2i\pi f = g,$$

on a la relation

$$\exp(-2\pi \operatorname{Im} f) = |g| = 1$$

autrement dit f est à valeurs réelles.

Montrons que l'application induite par θ est surjective. Pour toute fonction g de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$, il existe une fonction f de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ telle que

$$|g| = \exp f.$$

On a alors

$$\frac{d(|g|^{-1}g)}{|g|^{-1}g} = \frac{dg}{g} - df$$

ce qui démontre l'assertion.

Le second diagramme se traite de la même manière.

On désigne par $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ (resp. $\mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{Z})$) le sous-groupe de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ ou $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ (resp. $\mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R})$ ou $\mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{C})$), image de l'homomorphisme δ .

Désignons par G le groupe fondamental de X en un point base x_0 .

Pour toute forme différentielle fermée u de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega^1)$ et tout lacet c de X , on appelle *période de u sur c* , l'intégrale de u sur c . Cette période ne dépend que de la classe de cohomologie de u et de la classe d'homotopie de c (lemme 1). On a donc un homomorphisme canonique

$$\bar{\omega} : \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \rightarrow \operatorname{Hom}(G, \mathbf{R})$$

THÉORÈME 1. *L'homomorphisme $\bar{\omega}$ est un isomorphisme. Il envoie $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ sur $\operatorname{Hom}(G, \mathbf{Z})$.*

Montrons tout d'abord que $\bar{\omega}$ est injectif. Soit u une forme différentielle fermée de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega^1)$ et soit c un chemin d'origine x_0 et d'extrémité x dans X . Si toutes les périodes de u sont nulles, l'intégrale

$$f(x) = \int_c u$$

ne dépend pas de c . Montrons que f appartient à $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ et que sa différentielle est u . Tout point x_1 de X possède un voisinage connexe U sur

lequel u est la différentielle d'une fonction g de $C^\infty(U, \mathbf{R})$ (lemme de Poincaré). On a alors pour tout point x de U

$$f(x) = \int_c u + g(x) - g(x_1)$$

où c est un chemin fixe joignant x_0 à x_1 . Ceci démontre l'assertion.

Montrons maintenant que $\bar{\omega}$ est surjective. Désignons par α un homomorphisme de G dans \mathbf{R} , par \tilde{X} le revêtement universel de X et par π la projection canonique de \tilde{X} dans X . On rappelle que le groupe G s'identifie au groupe des transformations de ce revêtement; on le fait opérer sur $\tilde{X} \times \mathbf{R}$ par la formule

$$c \cdot (x, t) = (c(x), \alpha(c) + t).$$

On désigne par Y l'espace des orbites, par ρ la projection canonique de $X \times \mathbf{R}$ dans Y et par p l'unique application rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xleftarrow{pr_1} & \tilde{X} \times \mathbf{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \rho \\ X & \xleftarrow{p} & Y \end{array}$$

Soit U un ensemble ouvert simplement connexe de X et soit V une composante connexe de $\pi^{-1}(U)$. Le groupe G opérant trivialement sur $V \times \mathbf{R}$, on voit que ρ induit un homéomorphisme de $V \times \mathbf{R}$ sur $p^{-1}(U)$. On en déduit aisément que Y est séparé et que $\tilde{X} \times \mathbf{R}$ est son revêtement universel. On munit Y de l'unique structure différentielle faisant de ρ un isomorphisme local (§ 1, exemple 4).

L'étape suivante consiste à construire une section s de p , i.e. une application indéfiniment dérivable de X dans Y telle que

$$p \cdot s = 1_X \quad ^1).$$

On désigne par $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux recouvrements ouverts localement finis de X tels que U_n soit simplement connexe et V_n relativement compact dans U_n pour tout entier n . On construit alors par récurrence une section s_n de p indéfiniment dérivable au voisinage de $\bigcup_{0 \leq j \leq n} \bar{V}_j$ et qui coïncide avec s_{n-1} sur $\bar{V}_n \cap \bigcup_{0 \leq j \leq n-1} \bar{V}_j$. Ceci est possible puisque l'on a un diagramme

commutatif

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_n) & \simeq & U_n \times \mathbf{R} \\ p \searrow & & \swarrow pr_1 \\ & U_n & \end{array}$$

¹⁾ On prendra garde que p n'est pas un fibré vectoriel sur X : les transitions sont linéaires affines et non linéaires.

L'application s s'obtient par recollement des s_n .

Remarquons maintenant que la forme différentielle dt sur $\tilde{X} \times \mathbf{R}$ est invariante par G . Par passage au quotient, elle définit une forme différentielle fermée u sur Y et l'on pose

$$v = s^*(u).$$

Pour tout lacet c de X au point x_0 et tout point (x, t) de $\tilde{X} \times \mathbf{R}$ se projetant sur $s(x_0)$, il existe un chemin \tilde{c} et un seul relevant $s \cdot c$ et ayant (x, t) pour origine. Son extrémité est par définition le point $(c(x), \alpha(c) + t)$ et l'on a

$$\int_c v = \int_c s^*(u) = \int_{s \cdot c} u = \int_{\tilde{c}} dt = \alpha(c)$$

ce qui démontre finalement la surjectivité de $\bar{\omega}$.

Il reste à voir que les formes différentielles à périodes entières sont exactement les différentielles logarithmiques.

La première partie du théorème montre qu'une fonction f de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{U})$ possède un logarithme sur tout ensemble ouvert simplement connexe. Puisque deux tels logarithmes diffèrent d'un entier, toutes les périodes de

$\frac{1}{2i\pi} \frac{df}{f}$ sont des entiers.

Réciproquement, désignons par u une forme différentielle fermée de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega^1)$. Toujours en vertu de la première partie du théorème, la forme différentielle $\pi^*(u)$ est exacte sur le revêtement universel \tilde{X} . Désignons par f une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\tilde{X}, \mathbf{R})$ dont la différentielle est $\pi^*(u)$. Si les périodes de u sont entières, la fonction $\exp(2i\pi f)$ est G -invariante ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE 1. *Si X est simplement connexe, toute forme différentielle fermée de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega^1)$ est exacte et toute fonction de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ possède un logarithme.*

COROLLAIRE 2. *Si le groupe G est de génération finie, l'injection canonique de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ induit un isomorphisme*

$$\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{R} = \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \quad ^1).$$

Le corollaire 2 s'applique en particulier si X est compacte (appendice II, proposition 1).

¹⁾ On peut exprimer ce fait en disant que $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ est un *réseau* de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$, i.e. un sous-groupe libre dont le rang est égal à la dimension de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$.

Soit ϕ une carte orientée de X et soit D un disque de centre x relativement compact dans ϕ . Pour toute forme différentielle fermée u de $\mathcal{C}^\infty(X \setminus \{x\}, \Omega_{\mathbb{C}}^1)$, le nombre complexe

$$\text{Rés}(u, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} u$$

où ∂D désigne le bord orienté de D ne dépend que de u : c'est une conséquence immédiate de la formule de Stokes. On l'appelle le *résidu de u au point x* .

Supposons X simplement connexe. Il résulte du théorème 1 appliqué à la surface différentielle $X \setminus \{x\}$ que u est exacte si et seulement si son résidu au point x est nul.

On identifie désormais \mathbf{R}^2 et \mathbf{C} au moyen de l'isomorphisme \mathbf{R} -linéaire λ défini par

$$\lambda(x_1, x_2) = x_1 + ix_2 \quad \text{et} \quad \lambda^{-1}(z) = \left(\frac{1}{2}(z + \bar{z}), \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \right).$$

En particulier, toute carte de X apparaît comme une fonction à valeurs complexes.

LEMME 3. Soient ϕ et ψ deux cartes orientées de X centrées en un point x , ayant pour domaine le même ensemble simplement connexe U .

(1) La différentielle logarithmique de ϕ appartient à $L_{\text{loc}}^1(U, \Omega_{\mathbb{C}}^1)$. Son résidu au point x est égal à 1.

(2) Tout logarithme de $\phi^{-1}\psi$ demeure borné au voisinage de x .

La première assertion résulte immédiatement des définitions: il suffit d'introduire des coordonnées polaires dans la carte ϕ . Démontrons la seconde. Dans un voisinage ouvert convexe V de l'origine, le changement de cartes γ de ϕ dans ψ s'écrit

$$\gamma_1 = u_1x_1 + u_2x_2 \quad \text{et} \quad \gamma_2 = v_1x_1 + v_2x_2$$

(§ 3, lemme 2). Le jacobien de γ à l'origine est positif. Il est donné par la formule

$$\text{jac}(\gamma)(0) = u_1(0)v_2(0) - u_2(0)v_1(0).$$

On définit des fonctions h_1 et h_2 de $\mathcal{C}^\infty(V, \mathbf{C})$ en posant

$$h_1 = \frac{1}{2}(u_1 + v_2) + \frac{1}{2i}(u_2 - v_1) \quad \text{et} \quad h_2 = \frac{1}{2}(u_1 - v_2) - \frac{1}{2i}(u_2 + v_1).$$

On a alors

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 = h_1 z + h_2 \bar{z} \quad \text{et} \quad \text{jac}(\gamma)(0) = |h_1(0)|^2 - |h_2(0)|^2.$$

Il existe par conséquent deux nombres réels ε et η strictement positifs tels que

$$|h_1(z) - h_1(0)| \leq \eta \quad \text{et} \quad |h_2(z)| + 2\eta \leq |h_1(0)|$$

pour tout nombre complexe z de module inférieur ou égal à ε . On en déduit que

$$|h_1(z) + \frac{\bar{z}}{z} h_2(z) - h_1(0)| \leq \eta + |h_2(z)| \leq |h_1(0)| - \eta.$$

En particulier, la fonction $z^{-1}\gamma$ qui n'est autre que l'expression de $\phi^{-1}\psi$ dans la carte ϕ possède un logarithme borné dans la couronne

$$\{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| \leq \varepsilon\},$$

ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 1. *Pour tout chemin c d'origine x et d'extrémité y dans X , il existe une fonction h de $\mathcal{C}^\infty(X \setminus \{x, y\}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions suivantes :*

- (1) *La différentielle logarithmique de h appartient à $L_c^1(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$.*
- (2) *La restriction de h (resp. h^{-1}) à un voisinage convenable de x (resp. y) est une carte orientée de X centrée en x (resp. y).*
- (3) *Pour toute forme différentielle fermée u de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$, on a*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X \frac{dh}{h} \wedge u = \int_c u.$$

Si de plus c est un lacet, on peut supposer que h appartient à $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C}^)$.*

Nous démontrerons tout d'abord une propriété d'additivité que nous utiliserons plusieurs fois par la suite. Supposons que l'on ait

$$c = c_1 c_2$$

et qu'il existe des fonctions h_1 et h_2 vérifiant les conditions de la proposition pour les chemins c_1 et c_2 . Désignons par a l'extrémité de c_1 (qui est aussi l'origine de c_2). La fonction $h_1 h_2$ possède toutes les propriétés requises, sauf qu'elle est peut être singulière au point a . Sur un voisinage ouvert convenable U de a , la fonction $h_1 h_2$ possède un logarithme f et ce logarithme

demeure borné au voisinage de a (lemme 3). Désignons par α une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(U, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de a et posons

$$h = h_1 h_2 \exp(-2i\pi\alpha f).$$

La fonction h appartient à $\mathcal{C}^\infty(X \setminus \{x, y\}, \mathbf{C}^*)$ et l'on a pour toute forme différentielle fermée u de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X \frac{dh}{h} \wedge u = \int_c u - \int_X d(\alpha f) \wedge u.$$

De plus, si l'on désigne par D_ε le disque de centre a et de rayon ε dans une carte orientée de centre a , on a

$$\int_X d(\alpha f) \wedge u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{X \setminus D_\varepsilon} d(\alpha f) \wedge u = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\varepsilon} \alpha f u = 0.$$

On peut donc supposer que X est un ensemble ouvert convexe de \mathbf{C} et que c est donné par la formule

$$c(t) = (2t - 1, 0)$$

pour t compris entre 0 et 1. Désignons par X' le complémentaire de l'image de c . Il résulte du théorème 1 que la fonction g définie par

$$g(z) = \frac{z + 1}{z - 1}$$

possède un logarithme sur X' et l'on pose

$$\begin{cases} h(z) = \exp(2i\pi\alpha(z) \log g(z)) & \text{si } z \in X' \\ h(z) = g(z) & \text{si } z \in X \setminus X' \end{cases}$$

en désignant par α une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de l'image de c . Vérifions la condition (3). Toute forme différentielle fermée sur X est exacte (lemme de Poincaré) et l'on a pour toute fonction f de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{C})$,

$$\begin{aligned} \int_X \frac{dh}{h} \wedge df &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{X \setminus (D'_\varepsilon \cup D''_\varepsilon)} d\left(f \frac{dh}{h}\right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D'_\varepsilon} f \frac{dh}{h} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D''_\varepsilon} f \frac{dh}{h}, \end{aligned}$$

où D'_ε (resp. D''_ε) désigne le disque de centre x (resp. y) et de rayon ε . En passant en coordonnées polaires, on vérifie aisément que l'on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\varepsilon''} f \frac{dh}{h} = 2i\pi f(y) \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial D_\varepsilon'} f \frac{dh}{h} = -2i\pi f(x)$$

ce qui démontre la proposition.

Remarque 1.

On appelle *chemin joignant un point x à l'infini dans X* toute application propre et continue c de \mathbf{R}_+ dans X qui envoie l'origine sur x . Un tel chemin existe toujours si X est ouverte (exercice pour le lecteur). On définit de manière évidente l'intégrale d'une forme fermée de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \Omega_C^1)$ le long de c et l'on vérifie aisément qu'il existe une fonction h de $\mathcal{C}^\infty(X \setminus \{x\}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions suivantes :

(1) La différentielle logarithmique de h appartient à $L_{loc}^1(X, \Omega_C^1)$.

(2) La restriction de h à un voisinage convenable de x est une carte orientée de X centrée en x .

(3) Pour toute forme différentielle fermée u de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \Omega_C^1)$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X u \wedge \frac{dh}{h} = \int_c u .$$

On peut de plus supposer que le support de h est contenu dans un voisinage arbitraire de l'image de c .

La formule de Stokes montre que la forme bilinéaire canonique

$$\Delta : \mathcal{C}_c^\infty(X, \Omega^1) \times \mathcal{C}^\infty(X, \Omega^1) \rightarrow \mathbf{R}$$

définie par

$$\Delta(u, v) = \int_X u \wedge v$$

induit par restriction et passage aux quotients une forme bilinéaire canonique

$$\Delta : \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R} .$$

THÉORÈME 2. *Les formes bilinéaires*

$$\Delta : \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{Z}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{et} \quad \Delta : \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{R}$$

sont non dégénérées.

Soit v une forme différentielle fermée de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega^1)$ telle que $\Delta(\cdot, v)$ soit nulle. Pour tout lacet c , il existe une fonction h de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ telle que

$$\int_c v = \frac{1}{2i\pi} \int_X \frac{dh}{h} \wedge v = 0 .$$

En particulier, toutes les périodes de v sont nulles et par conséquent v est exacte (théorème 1). Ceci montre que la première forme est non dégénérée.

Soit u une forme différentielle fermée de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \Omega^1)$ telle que $\Delta(u,)$ soit nulle. Il résulte de ce qui précède que u est la différentielle d'une fonction f de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ et tout revient à montrer que l'on peut choisir f à support compact. Soit K un voisinage compact du support de u dont le complémentaire n'a pas de composante connexe relativement compacte (appendice II, lemme 5). Il est clair que f est constante sur chaque composante connexe de $X \setminus K$. Montrons qu'elle est constante sur $X \setminus K$.

Soient U et V les composantes connexes de deux points x et y de $X \setminus K$. On désigne par α un chemin joignant x à l'infini dans U , par β un chemin joignant y à l'infini dans V et par c un chemin joignant x à y dans X . Il existe des fonctions h_α et h_β dans $\mathcal{C}^\infty(X \setminus \{x\}, \mathbf{C}^*)$ et $\mathcal{C}^\infty(X \setminus \{y\}, \mathbf{C}^*)$ respectivement dont le support est contenu dans le complémentaire de K , vérifiant les conditions de la remarque 1 pour les chemins α et β , et une fonction h de $\mathcal{C}^\infty(X \setminus \{x, y\}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions de la proposition 1 pour le chemin c . Comme dans la proposition 1, on voit que l'on peut supposer la fonction $h_\alpha h^{-1} h_\beta^{-1}$ indéfiniment dérivable. On a alors

$$f(y) - f(x) = \int_c u = \frac{1}{2i\pi} \int_X u \wedge \frac{d(h_\alpha h^{-1} h_\beta^{-1})}{h_\alpha h^{-1} h_\beta^{-1}} = 0$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE 1. *La forme bilinéaire canonique*

$$\Delta : \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$$

est non dégénérée.

COROLLAIRE 2. *Si le groupe G est de génération finie, la forme bilinéaire Δ induit des isomorphismes*

$$\mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R}) = \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})^* \quad \text{et} \quad \mathbf{H}^1(X, \mathbf{R}) = \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{R})^* .$$

Remarque 2.

Le corollaire 2 du théorème 2 s'applique en particulier si X est compacte (appendice II, proposition 1). On voit alors que l'espace vectoriel $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{R})$ est de dimension paire puisque la forme bilinéaire Δ est non dégénérée et alternée.

L'ensemble G' défini par

$$G' = \{ c \in G \mid \int_c u = 0 \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) \}$$

est un sous-groupe contenant le groupe des commutateurs. Le quotient \tilde{G} est donc un groupe abélien dont on vérifie aisément qu'il est sans torsion. Il résulte par ailleurs du théorème 1 que $\bar{\omega}$ induit un isomorphisme de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ sur $\text{Hom}(\tilde{G}, \mathbf{Z})$.

Tout lacet c de X possède une image naturelle dans \tilde{G} , à savoir la classe du lacet $\alpha\alpha^{-1}$ où α est un chemin joignant x_0 à un point de l'image de c . En particulier, toute courbe compacte orientée de X possède une image naturelle dans \tilde{G} (appendice IV, théorème 1). D'autre part, si h désigne une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions de la proposition 1 pour le lacet c , la classe dans $\mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{Z})$ de la différentielle logarithmique de h ne dépend que de la classe de c dans \tilde{G} . C'est une conséquence immédiate des définitions et du théorème 2. On a donc un homomorphisme canonique

$$\theta : \tilde{G} \rightarrow \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{Z}).$$

THÉORÈME 3. *L'homomorphisme θ est un isomorphisme.*

L'injectivité de θ résulte immédiatement des définitions.

Soit h une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{U})$. Pour toute valeur régulière z de h différente de 1, l'ensemble $h^{-1}(z)$ est une courbe compacte de X . C'est donc une réunion finie de courbes isomorphes à \mathbf{U} . Nous allons munir cette courbe d'une orientation naturelle. Désignons par f l'unique isomorphisme de $\mathbf{U} \setminus \{1\}$ sur $]0, 1[$ tel que

$$\exp(2i\pi f) = 1_{\mathbf{U} \setminus \{1\}}$$

et par t l'image de z par cet isomorphisme. L'ensemble $(f \cdot h)^{-1}(]0, t])$ est une pièce de la surface différentielle $(f \cdot h)^{-1}(]0, 1])$ dont le bord est précisément $h^{-1}(z)$. On munit ce bord de l'orientation induite.

Soient t' et t'' deux valeurs régulières de $f \cdot h$ avec t' strictement inférieur à t'' . L'ensemble

$$Y(t', t'') = (f \cdot h)^{-1}([t', t''])$$

est une pièce compacte de X et l'on a pour toute forme différentielle fermée u de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_{\mathbf{C}}^1)$,

$$\int_{(f \cdot h)^{-1}(t'')} u - \int_{(f \cdot h)^{-1}(t')} u = \int_{Y(t', t'')} du = 0.$$

En particulier, la classe c de $h^{-1}(z)$ dans \tilde{G} est indépendante de la valeur régulière z . D'autre part, sur l'ensemble ouvert $h^{-1}(\mathbf{U} \setminus \{1\})$, on a la relation

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{dh}{h} = d(f \cdot h).$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{Y(t', t'')} \frac{dh}{h} \wedge u = t'' \int_{(f \cdot h)^{-1}(t'')} u - t' \int_{(f \cdot h)^{-1}(t')} u.$$

Le théorème de Sard (§ 1, théorème 2) montre qu'il existe des valeurs régulières de $f \cdot h$ arbitrairement voisines de 0 et de 1. On en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_X \frac{dh}{h} \wedge u = \lim_{\substack{t' \rightarrow 0 \\ t'' \rightarrow 1}} \frac{1}{2i\pi} \int_{Y(t', t'')} \frac{dh}{h} \wedge u = \int_c u.$$

Autrement dit, l'image de c par l'application θ n'est autre que la classe de h dans $\mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{Z})$, ce qui démontre le théorème.

Remarque 3.

Si u et v sont des éléments de $\mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{Z})$ et $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ respectivement, on a

$$\int_X u \wedge v = \int_c v$$

où c désigne l'unique élément de \tilde{G} défini par u . Ceci montre en particulier que Δ induit une forme \mathbf{Z} -bilinéaire rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{Z}) \times \mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\Delta} & \mathbf{Z} \\ \theta \uparrow & & \downarrow \bar{\omega} \quad \parallel \\ \tilde{G} \times \text{Hom}(\tilde{G}, \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & \mathbf{Z} \end{array}$$

commutatif. La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ étant non dégénérée par définition de \tilde{G} , il en est de même de Δ et l'on a un isomorphisme canonique de $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})$ sur $\mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{Z})^*$. Si de plus \tilde{G} est de type fini, on a un isomorphisme canonique de $\mathbf{H}_c^1(X, \mathbf{Z})$ sur $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{Z})^*$.

La forme \mathbf{Z} -bilinéaire Δ s'appelle la *forme d'intersection de X* . Nous allons essayer d'expliquer pourquoi.

Soient g et h deux fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{U})$ et $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{U})$ respectivement et soit u l'application produit (g, h) de X dans $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$.

L'application de $g^{-1}(\mathbf{U} \setminus \{1\})$ dans $(\mathbf{U} \setminus \{1\}) \times \mathbf{U}$ induite par u est propre. On désigne par v son degré (§ 4, théorème 4). Notons que l'on a

$$\frac{-1}{4\pi^2} \int_X \frac{dg}{g} \wedge \frac{dh}{h} = \frac{-v}{4\pi^2} \int_{\mathbf{U} \times \mathbf{U}} \frac{dz}{z} \wedge \frac{dw}{w} = v.$$

Désignons par (z, w) une valeur régulière de u , avec z et w distincts de 1, par f l'unique isomorphisme de $\mathbf{U} \setminus \{1\}$ sur $]0, 1[$ tel que

$$\exp(2i\pi f) = 1_{\mathbf{U} \setminus \{1\}}$$

et par (s_0, t_0) l'image de (z, w) par $f \times f$.

Les ensembles $g^{-1}(z)$ et $h^{-1}(w)$ sont deux courbes de X naturellement orientées (démonstration du théorème 3), dont la première est compacte. Soit x un point de l'intersection de ces deux courbes. La restriction de $(f \times f) \cdot u$ à un voisinage convenable de x est une carte de X et l'image de $g^{-1}(z)$ (resp. $h^{-1}(w)$) par cette carte est la courbe

$$\{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid s = s_0\} \quad (\text{resp. } \{(s, t) \in \mathbf{R}^2 \mid t = t_0\}).$$

Si la carte est orientée, on dit que le *nombre d'intersection de $g^{-1}(z)$ et $h^{-1}(w)$ au point x* est 1 (quand on se promène le long de $g^{-1}(z)$, la courbe $h^{-1}(w)$ vient de la droite). Si la carte n'est pas orientée, on dit que le *nombre d'intersection de $g^{-1}(z)$ et $h^{-1}(w)$ au point x* est -1 (quand on se promène le long de $g^{-1}(z)$, la courbe $h^{-1}(w)$ vient de la gauche). Ainsi le degré ν apparaît comme le nombre de points d'intersection (avec signes) des deux courbes orientées $g^{-1}(z)$ et $h^{-1}(w)$.

Nous allons maintenant calculer la classe de Chern d'un fibré en droites complexes sur X . On peut se limiter au cas où X est compacte: si X est ouverte, les deux groupes $\text{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ et $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ sont nuls (§ 2, corollaire du théorème 1 et § 4, théorème 3). On sait alors que l'intégration des formes différentielles de degré 2 induit un isomorphisme canonique de $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ sur \mathbf{C} (§ 4, théorème 3). La classe de Chern d'un fibré en droites complexes sur X apparaît donc comme un nombre complexe.

Soit π un fibré en droites complexes sur X et soit x un point de X .

Désignons par Φ et Ψ des cartes de π ayant pour domaine le même voisinage de x et par g la transition de Φ dans Ψ . Pour toute section s de $\mathcal{C}^\infty(X \setminus \{x\}, \pi)$, on a

$$s_\Psi = g s_\Phi.$$

En particulier, si s ne s'annule pas, le résidu au point x de la différentielle logarithmique de s_Φ est indépendant de Φ . C'est un entier que l'on appelle *l'ordre de s au point x* et que l'on désigne par $0_x(s)$.

Soit A un ensemble fini de X et soit s une section partout non nulle de $\mathcal{C}^\infty(X \setminus A, \pi)$. On appelle *ordre de s* l'entier défini par

$$0(s) = \sum_{x \in A} 0_x(s).$$

PROPOSITION 2. On suppose X compacte et l'on désigne par A un ensemble fini de X . Pour toute section s partout non nulle de $\mathcal{C}^\infty(X \setminus A, \pi)$, on a

$$0(s) = \text{ch}(\pi).$$

Désignons par x_1, \dots, x_n les points de A . Il existe deux familles $(U_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $(V_j)_{1 \leq j \leq n}$ d'ensembles ouverts de X vérifiant les conditions suivantes:

(1) L'ensemble U_j est le domaine d'une carte Φ_j de π et le domaine d'une carte orientée ψ_j de X centrée au point x_j .

(2) L'ensemble V_j est un disque relativement compact de centre x_j dans ψ_j .

(3) Les ensembles U_1, \dots, U_n sont deux à deux disjoints.

Puisque la section s est partout non nulle sur $X \setminus A$, le fibré π est trivial sur l'ensemble

$$V_0 = X \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq n} \bar{V}_j.$$

Choisissons une trivialisations Φ_0 et désignons par g_{kj} la transition de Φ_j dans Φ_k pour tout couple d'entiers (j, k) compris entre 0 et n . On a

$$s_k = g_{kj} s_j$$

où s_j désigne l'expression de s dans Φ_j . Choisissons pour tout entier j compris entre 1 et n une fonction α_j de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de $X \setminus V_j$ et à 0 au voisinage de x_j . Les formes différentielles $\alpha_j \frac{ds_j}{s_j}$ appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(U_j, \Omega_C^1)$ et l'on a

$$\frac{1}{2i\pi} \alpha_k \frac{ds_k}{s_k} - \frac{1}{2i\pi} \alpha_j \frac{ds_j}{s_j} = \frac{1}{2i\pi} \frac{dg_{kj}}{g_{kj}}$$

en tout point de $V_j \cap V_k$. Par définition de la classe de Chern, on a donc

$$\text{ch}(\pi) = \int_X u$$

où u désigne la forme différentielle de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_C^2)$ obtenue par recollement des $\frac{1}{2i\pi} d\alpha_j \wedge \frac{ds_j}{s_j}$. Par conséquent,

$$\text{ch}(\pi) = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{2i\pi} \int_{U_j} d\alpha_j \wedge \frac{ds_j}{s_j} = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial V_j} \frac{ds_j}{s_j} = 0(s)$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE. *La classe de Chern d'un fibré en droites complexes sur X est un entier.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 et de l'existence de sections transverses (§ 2, lemme 5).

LEMME 4. *Soient π et ρ deux fibrés en droites complexes sur X et soient s et t deux sections transverses de π et ρ respectivement.*

(1) *L'ordre de s en un de ses zéros est égal à 1 ou -1 .*

(2) *Si l'ordre de s est égal à l'ordre de t en tout point, alors π et ρ sont isomorphes.*

La première assertion résulte immédiatement des définitions. La démonstration de la seconde est laissée en exercice au lecteur (on procèdera comme dans la proposition 1 pour construire une section partout non nulle de $\mathcal{C}^\infty(X, \pi \otimes \rho^*)$).

Soit ϕ une carte orientée de X centrée en un point x . On désigne par U_0 son domaine et par U_1 l'ensemble $X \setminus \{x\}$. On définit un cocycle complexe de rang 1 subordonné au recouvrement (U_0, U_1) en posant

$$g_{1,0} = \phi^{-1} \quad \text{et} \quad g_{0,1} = \phi.$$

Désignons par π un fibré en droites complexes associé à ce cocycle. La fonction ϕ sur U_0 et la fonction constante 1 sur U_1 se recollent en une section transverse s de π et l'on a

$$\text{ch}(\pi) = 0(s) = 0_x(s) = 1.$$

Le lemme 4 montre que la classe ξ_x de π dans $\text{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ ne dépend que de x .

LEMME 5. *Le groupe $\text{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ est engendré par les fibrés de la forme ξ_x .*

Soit ξ un fibré principal de groupe structural \mathbf{C}^* sur X et soit π un fibré en droites complexes associé à ξ . On désigne par s une section transverse de π , par x_1, \dots, x_n les zéros d'ordre 1 de s et par y_1, \dots, y_m les zéros d'ordre -1 de s . On voit aisément à l'aide du lemme 4 que l'on a

$$\xi = \xi_{x_1} \cdots \xi_{x_n} \bar{\xi}_{y_1} \cdots \bar{\xi}_{y_m}$$

ce qui démontre l'assertion (§ 2, lemme 4).

THÉORÈME 4. *Si X est compacte, la classe de Chern induit un isomorphisme canonique de $\text{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ sur \mathbf{Z} .*

En vertu de ce qui précède, il suffit de montrer que ch est injective, ou ce qui revient au même, que tout fibré principal de la forme

$$\xi = \xi_x \xi_y^{-1}$$

est trivial. Désignons par π (resp. ρ) un fibré en droites complexes, associé à ξ_x (resp. ξ_y) et par s (resp. t) une section transverse de π (resp. ρ) possédant un seul zéro d'ordre 1 au point x (resp. y). Soit c un chemin joignant x à y dans X et soit h une fonction de $\mathcal{C}^\infty(X \setminus \{x, y\}, \mathbf{C}^*)$ vérifiant les conditions de la proposition 1. La section $h \frac{t}{s}$ de $\mathcal{C}^\infty(X \setminus \{x, y\}, \pi \otimes \rho^*)$ est partout non nulle. Elle est d'ordre 0 au point x et au point y . L'assertion résulte alors du lemme 4.