§ 4. Calcul intégral

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

On pose alors

$$l(u)(x_1, \ldots, x_n)$$
$$= \int_{-\infty}^{x_j} (i_j(u_2)(x_1, \ldots, x_{j-1}, t) - i_{j-1}(u)(x_1, \ldots, x_{j-1})\,\alpha(t))\,dt\,.$$

Il est clair que l est une application linéaire de A_{j-1} dans $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ qui commute avec l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ pour k compris entre 1 et $j-1$. De plus, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(l(u))(x_1, \ldots, x_n) = i_j(u_2)(x_1, \ldots, x_j) - i_{j-1}(u)(x_1, \ldots, x_{j-1})\,\alpha(x_j)$$
$$l(d_{j-1}u)(x_1, \ldots, x_n) = i_j(u_1)(x_1, \ldots, x_j)\,.$$

On pose finalement

$$k_{j-1}(u) = k_j(u_1) - dx_j \wedge k_j(u_2) + l(u)\,\omega_j$$

et l'on vérifie aisément l'assertion.

Il résulte du lemme de Poincaré que la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \to \mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d} \mathscr{C}^\infty_c(X, \Omega^1) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \mathscr{C}^\infty_c(X, \Omega^n) \xrightarrow{i} \mathbf{R} \to 0$$

est exacte pour tout cube ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Remarque 1.

Toutes les constructions et les résultats de ce paragraphe demeurent valables si l'on utilise les germes de fonctions à valeurs complexes. On obtient alors le *fibré cotangent complexe à* X désigné par $\Omega^1_{\mathbf{C}}$. Pour tout point x de X et toute carte ϕ dont le domaine contient x, l'application $\varepsilon_{x,\phi}$ identifie $\Omega^1_{\mathbf{C},x}$ à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (lemme 1). On désigne de même par $\Omega^r_{\mathbf{C}}$ et $\Omega_{\mathbf{C}}$ les fibrés vectoriels $\Lambda^r\Omega^1_{\mathbf{C}}$ et $\Lambda\Omega^1_{\mathbf{C}}$. Notons que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\Omega^r_{\mathbf{C}} = \Omega^r \otimes \mathbf{C}_X \quad \text{et} \quad \Omega_{\mathbf{C}} = \Omega \otimes \mathbf{C}_X\,.$$

§ 4. Calcul intégral

Lemme 1. *Pour qu'une variété différentielle X de dimension pure n soit orientable, il faut et il suffit que le fibré Ω^n soit trivial.*

Désignons par $(\phi_\iota)_{\iota\in I}$ un atlas orienté de X et par $(\alpha_\iota)_{\iota\in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\iota)_{\iota\in I}$ formé des domaines de

cartes de cet atlas. On définit une forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n)$ en posant

$$u = \sum_{\iota \in I} \alpha_\iota \, d\phi_{\iota,1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{\iota,n} .$$

Pour tout indice κ, on a

$$u \mid_{U_\kappa} = \Big(\sum_{\iota \in I} \alpha_\iota g_{\iota\kappa}\Big) d\phi_{\kappa,1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{\kappa,n}$$

où $g_{\iota\kappa}$ désigne le jacobien du changement de cartes de ϕ_κ dans ϕ_ι. Ceci montre que u ne s'annule jamais et par conséquent la condition est nécessaire.

Réciproquement, soit u une forme différentielle partout non nulle de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n)$. Pour toute carte ϕ de domaine U dans X, il existe une fonction g partout non nulle dans $\mathscr{C}^\infty(U, \mathbf{R})$ telle que

$$u \mid_U = g \, d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n .$$

Quitte à remplacer ϕ_1 par $-\phi_1$, on peut supposer que g est strictement positive. Un atlas formé de telles cartes est évidemment orienté.

Sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés différentielles considérées dans ce paragraphe sont orientées.

Soit X une variété différentielle (orientée) de dimension pure n.

On dit qu'une forme différentielle u homogène de degré n est *positive* si pour toute carte orientée ϕ de domaine U dans X, l'unique fonction g définie sur U par

$$u \mid_U = g \, d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n$$

est à valeurs réelles positives.

Désignons par u une forme différentielle de $\mathscr{C}^0_c(X, \Omega^n_C)$, par ϕ et ψ des cartes orientées de domaines respectifs U et V dans X. On suppose que le support de u est contenu dans $U \cap V$. On peut écrire

$$u \mid_U = f \, d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n \quad \text{et} \quad u \mid_V = g \, d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n$$

où f et g sont des fonctions continues à valeurs complexes. On a les formules

$$f_\phi = \operatorname{jac}(\gamma) \, g_\phi \quad \text{et} \quad g_\psi = g_\phi \cdot \gamma^{-1}$$

où γ désigne le changement de cartes de ϕ dans ψ.

Puisque le jacobien de γ est positif, la formule du changement de variables dans les intégrales multiples montre que l'on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} g_\psi \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} (g_\phi \cdot \gamma^{-1}) \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} |\operatorname{jac}(\gamma)| \, g_\phi \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} f_\phi \, d\mu$$

en désignant par μ la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{R}^n$. On pose alors

$$\int_X u = \int_{\mathbf{R}^n} f_\phi \, d\mu .$$

Ce nombre est indépendant de la carte orientée ϕ dont le domaine contient le support de u.

Dans le cas général où le support de u n'est contenu dans aucun domaine de carte, on désigne par $(U_\iota)_{\iota \in I}$ (resp. $(V_\kappa)_{\kappa \in K}$) un recouvrement de X par de tels domaines et par $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ (resp. $(\beta_\kappa)_{\kappa \in K}$) une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. La famille $(\alpha_\iota \beta_\kappa)$ est une partition de l'unité subordonnée à $(U_\iota \cap V_\kappa)$ et l'on a

$$\sum_{\iota \in I} \int_X \alpha_\iota u = \sum_{(\iota,\kappa) \in I \times K} \int_X \alpha_\iota \beta_\kappa u = \sum_{\kappa \in K} \int_X \beta_\kappa u .$$

On appelle *intégrale de u sur X* le nombre complexe défini par

$$\int_X u = \sum_{\iota \in I} \int_X \alpha_\iota u .$$

On notera que la forme linéaire canonique i ainsi obtenue sur $\mathscr{C}^0_c(X, \Omega^n_{\mathbf{C}})$ est réelle sur les formes différentielles réelles, positive sur les formes différentielles positives.

Munissons le fibré cotangent Ω^1 d'une métrique hermitienne (§ 2, lemme 3). Les fibrés vectoriels Ω et $\Omega_{\mathbf{C}}$ sont alors naturellement munis d'une métrique hermitienne (si $e_1, \ldots, e_n$ est une base orthonormale de Ω^1_x les vecteurs

$$e_J = e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_r}$$

où J parcourt $S_r(n)$ forment une base orthonormale de Ω^r_x et $\Omega^r{}_{\mathbf{C},x}$). On vérifie aisément que l'on a

$$|u \wedge v| \leqslant |u| \; |v|$$

quelles que soient les formes différentielles u et v.

Soient ϕ et ψ deux cartes orientées de X. Sur l'intersection de leurs domaines, on a la relation

$$\begin{aligned} &|d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n|^{-1} \, d\phi_1 \wedge \ldots \wedge d\phi_n \\ &= |d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n|^{-1} \, d\psi_1 \wedge \ldots \wedge d\psi_n . \end{aligned}$$

La forme différentielle ω obtenue par recollement est positive, partout non nulle; on l'appelle la *forme volume associée à la métrique hermitienne de Ω^1*. En particulier, la forme volume fournit une trivialisation de Ω^n.

La forme linéaire définie sur $\mathscr{C}_c^0(X, \mathbf{C})$ par

$$\mu(f) = \int_X f\omega$$

est réelle positive. Le théorème de Riesz ([5], théorèmes (2.14) et (2.17)) montre qu'elle correspond à une unique mesure borélienne régulière que l'on désigne encore par μ.

La tribu des ensembles μ-mesurables de X ne dépend pas de la structure hermitienne de Ω^1: une partie de X est μ-mesurable si et seulement si son image par toute carte de X est Lebesgue-mesurable.

Pour toute partie mesurable A de X, toute fonction mesurable f à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ ou toute fonction intégrable à valeurs dans $\mathbf{C}$, on pose

$$\int_A f\omega = \mu(\chi_A f)$$

où χ_A désigne la fonction caractéristique de A.

Soit π un fibré vectoriel complexe de rang pur m sur X, muni d'une métrique hermitienne. Pour tout ensemble mesurable A de X toute section mesurable s de π et tout nombre réel p au moins égal à 1, on pose

$$\| s \|_{L^p,A} = \left(\int_A |s|^p \omega\right)^{1/p}$$

$$\| s \|_{L^\infty,A} = \inf\{ t \in \mathbf{R}_+ \mid \mu(|s|^{-1}(]t, \infty[) \cap A) = 0 \}.$$

Ce nombre dépend des structures hermitiennes de Ω^1 et de π.

Pour tout élément p de $[1, \infty]$, on désigne par $L^p_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ l'ensemble des classes d'équivalence de sections mesurables s de π telles que $\| s \|_{L^p,K}$ soit fini pour tout ensemble compact K de X. C'est un espace vectoriel topologique localement convexe et complet pour la famille de semi-normes $\| \ \|_{L^p,K}$; c'est un espace de Fréchet si X est dénombrable à l'infini.

Pour qu'une section s appartienne à $L^p_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$, il faut et il suffit que l'application $(s_\Phi)_\phi$ appartienne à $L^p_{\mathrm{loc}}(\phi(U), \mathbf{C}^m)$ pour toute carte ϕ de X et toute carte Φ de π ayant même domaine U. Ceci montre en particulier que l'espace vectoriel topologique $L^p_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ est indépendant des structures hermitiennes de Ω^1 et π.

Pour tout ensemble compact K de X, on désigne par $L^p_K(X, \pi)$ l'ensemble des sections de $L^p_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ dont le support [1]) est contenu dans K. C'est un espace de Banach (et même un espace de Hilbert si p est égal à 2) pour la norme $\| \ \|_{L^p,K}$.

---

[1]) On appelle *support d'une section mesurable* le plus petit ensemble en dehors duquel elle est presque partout nulle.

On désigne enfin par $L^p_c(X, \pi)$ l'ensemble des sections de $L^p_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ à support compact. C'est un espace localement convexe et complet pour la topologie vectorielle limite inductive des espaces $L^p_K(X, \pi)$.

Notons que les inclusions canoniques

$$L^\infty_{\mathrm{loc}}(X, \pi) \subset L^q_{\mathrm{loc}}(X, \pi) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(X, \pi) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$$
$$L^\infty_c(X, \pi) \subset L^q_c(X, \pi) \subset L^p_c(X, \pi) \subset L^1_c(X, \pi)$$

sont continues pour tout nombre réel q au moins égal à p.

Pour tout élément p de $[1, \infty]$, l'ensemble des fonctions à support compact étagées sur la tribu borélienne de X est dense dans $L^p_c(X, \mathbf{C})$ et $L^p_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ (*loc. cit.* théorème (3.13)).

Pour tout élément p de $[1, \infty[$, l'ensemble $\mathscr{C}^0_c(X, \pi)$ est dense dans $L^p_c(X, \pi)$ et $L^p_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ (*loc. cit.* théorème (3.14)). Notons que $\mathscr{C}^0_c(X, \pi)$ est fermé dans $I^\infty_c(X, \pi)$ et que son adhérence dans $L^\infty_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ est égale à $\mathscr{C}^0(X, \pi)$.

Soient π et ρ deux fibrés vectoriels complexes sur X et soit δ une dualité de $\pi \otimes \rho$ dans $\mathbf{C}_X$. On suppose π et ρ munis de métriques hermitiennes vérifiant la condition

$$|\delta_x(y' \otimes y'')| \leqslant |y'| \; |y''|$$

pour tout point x de X et tout point y' (resp. y'') de π_x (resp. ρ_x).

Soient p et q deux éléments conjugués de $[1, \infty]$ (i.e. tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) et soit K une partie compacte de X. Pour toute section u de $L^p_K(X, \pi)$ et toute section v de $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \rho)$, l'inégalité de Hölder (*loc. cit.* théorème (3.8)) montre que l'on a

$$\left| \int_X \delta(u, v)\, \omega \right| \leqslant \| u \|_{L^p, K} \, \| v \|_{L^q, K}.$$

En particulier, la forme bilinéaire

$$\Delta : L^p_c(X, \pi) \times L^q_{\mathrm{loc}}(X, \rho) \to \mathbf{C}$$

définie par

$$\Delta(u, v) = \int_X \delta(u, v)\, \omega$$

est séparément continue (et même hypocontinue).

LEMME 2. *La forme bilinéaire*

$$\Delta : \mathscr{C}^0_c(X, \pi) \times L^1_{\mathrm{loc}}(X, \rho) \to \mathbf{C}$$

est non dégénérée.

Il suffit de montrer que toute section v de $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \rho)$ rendant la forme linéaire $\Delta(\ , v)$ nulle est elle-même identiquement nulle. La question étant

locale, on peut supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$, que π et ρ sont tous deux égaux au fibré produit $\mathbf{C}_X^m$ et que la dualité δ est donnée par la formule

$$\delta(y', y'') = \sum_{1 \leq j \leq m} y'_j y''_j .$$

On se ramène immédiatement au cas où m est égal à 1. Pour tout ensemble compact K de X et pour tout voisinage compact L de K dans X, il existe une fonction u continue sur X dont le support est contenu dans L et égale à 1 sur K. On en déduit que

$$|\Delta(\chi_K, v)| = |\Delta(\chi_K - u, v)| \leqslant \mu(L \backslash K) \| v \|_{L^1, L}$$

et par conséquent la forme linéaire $\Delta(\ , v)$ est nulle sur l'ensemble des fonctions à support compact étagées sur la tribu borélienne de X. Par densité et continuité, elle est donc nulle sur $L_c^\infty(X, \mathbf{C})$.

Pour toute partie compacte K de X, on définit alors une fonction u de $L_c^\infty(X, \mathbf{C})$ en posant

$$\begin{cases} u(x) = \overline{v(x)}\ |v(x)|^{-1} & \text{si } x \in K \text{ et si } v(x) \neq 0 \\ u(x) = 0 & \text{si } x \notin K \text{ ou si } v(x) = 0 . \end{cases}$$

Il résulte de cette définition et de ce qui précède que l'on a

$$\| v \|_{L^1, K} = \Delta(u, v) = 0$$

ce qui démontre l'assertion.

THÉORÈME 1. *Pour tout couple* (p, q) *d'éléments conjugués de* $]1, \infty[$, *la forme bilinéaire*

$$\Delta : L_c^p(X, \pi) \times L_{\mathrm{loc}}^q(X, \rho) \to \mathbf{C}$$

est une dualité d'espaces vectoriels topologiques [1]).

Il résulte du lemme 2 que les applications Δ_1 et Δ_2 induites par Δ sont injectives. Pour montrer qu'elles sont surjectives, nous allons tout d'abord examiner le cas où π et ρ sont tous deux égaux au fibré produit $\mathbf{C}_X^m$ et où la dualité δ est donnée par la formule

$$\delta(y', y'') = \sum_{1 \leq j \leq m} y'_j y''_j .$$

---

[1]) Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques. On dit qu'une forme bilinéaire Δ sur $E \times F$ est une *dualité d'espaces vectoriels topologiques* si elle est séparément continue et si elle induit une bijection Δ_1 (resp. Δ_2) de E (resp. F) sur le dual topologique de F (resp. E).

Toute forme linéaire continue α sur $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \rho)$ s'écrit

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont des formes linéaires continues sur $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$. Par définition de la topologie de $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$, il existe une partie compacte K de X et une constante c telles que

$$| \alpha_j(w) | \leqslant c \| w \|_{L^q, K}$$

pour tout w dans $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$. Il existe donc une fonction u_j de $L^p_K(X, \mathbf{C})$ telle que

$$\alpha_j(w) = \alpha_j(\chi_K w) = \mu(u_j w)$$

(*loc. cit.* théorème (6.16)) et si l'on pose

$$u = (u_1, \ldots, u_m)$$

on voit que l'on a

$$\Delta(u, v) = \sum_{1 \leq j \leq m} \mu(u_j v_j) = \sum_{1 \leq j \leq m} \alpha_j(v_j) = \alpha(v)$$

ce qui montre la surjectivité de Δ_1.

De même, toute forme linéaire continue β sur $L^p_c(X, \pi)$ s'écrit

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$$

où $\beta_1, \ldots, \beta_m$ sont des formes linéaires continues sur $L^p_c(X, \mathbf{C})$. Pour tout ensemble compact K de X, la restriction de β_j à $L^p_K(X, \mathbf{C})$ est continue et l'on voit qu'il existe une fonction $v_{K,j}$ et une seule dans $L^q_K(X, \mathbf{C})$ telle que

$$\beta_j(w) = \mu(w v_{K,j})$$

pour tout w dans $L^p_K(X, \mathbf{C})$. Ces fonctions se recollent en une fonction v_j de $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ et si l'on pose

$$v = (v_1, \ldots, v_m),$$

on voit que l'on a

$$\Delta(u, v) = \sum_{1 \leq j \leq m} \mu(u_j v_j) = \sum_{1 \leq j \leq m} \beta_j(u_j) = \beta(u)$$

ce qui montre la surjectivité de Δ_2.

Démontrons maintenant le cas général. Si α est une forme linéaire continue sur $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \rho)$, on voit comme précédemment qu'il existe un ensemble compact K de X tel que

$$\alpha(v) = \alpha(\chi_K v)$$

pour tout v dans $L^q_{\mathrm{loc}}(X, \rho)$. Il existe aussi un recouvrement fini $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de K par des domaines de cartes de ρ (ou de π) et pour chaque indice ι une fonction λ_ι de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ dont le support est contenu dans U_ι telle que

$$\sum_{\iota \in I} \lambda_\iota(x) = 1$$

pour tout point x de K. D'après la première partie de la démonstration, il existe une section u_ι de $L^p_c(U_\iota, \pi)$ telle que

$$\alpha(\lambda_\iota v) = \Delta(u_\iota, v).$$

La somme des u_ι est une section u de $L^p_c(X, \pi)$ et l'on a

$$\alpha(v) = \alpha(\chi_K v) = \sum_{\iota \in I} \alpha(\lambda_\iota v) = \sum_{\iota \in I} \Delta(u_\iota, v) = \Delta(u, v).$$

L'assertion relative à Δ_2 est laissée en exercice au lecteur.

Exemple 1.

Soit π un fibré vectoriel complexe sur X et soit r un entier naturel. On définit une dualité canonique

$$\theta : (\pi \otimes \Omega^r_{\mathbf{C}}) \otimes (\pi^* \otimes \Omega^{n-r}_{\mathbf{C}}) \to \Omega^n_{\mathbf{C}}$$

en posant

$$\theta((y' \otimes t') \otimes (y'' \otimes t'')) = \langle y', y'' \rangle\, t' \wedge t''$$

pour tout point x de X et tout élément $y' \otimes t'$ (resp. $y'' \otimes t''$) de $\pi_x \otimes \Omega^r_{\mathbf{C},x}$ (resp. $\pi^*_x \otimes \Omega^{n-r}_{\mathbf{C},x}$). Pour toute section u de $\pi \otimes \Omega^r_{\mathbf{C}}$ et toute section v de $\pi^* \otimes \Omega^{n-r}_{\mathbf{C}}$, on pose

$$(u, v) = \theta(u, v).$$

On désigne par δ la dualité obtenue en composant θ avec la trivialisation de la forme volume. Il résulte immédiatement de ces définitions que l'on a

$$(u, v) = \delta(u, v)\, \omega.$$

Par conséquent, la forme bilinéaire canonique

$$\Delta : L^p_c(X, \pi \otimes \Omega^r_{\mathbf{C}}) \times L^q_{\mathrm{loc}}(X, \pi^* \otimes \Omega^{n-r}_{\mathbf{C}}) \to \mathbf{C}$$

définie par

$$\Delta(u, v) = \int_X (u, v)$$

est une dualité d'espaces vectoriels topologiques pour tout couple (p, q) d'éléments conjugués de $]1, \infty[$.

Remarque 1.

Nous n'utiliserons le théorème 1 que dans le cas particulier où p et q sont tous deux égaux à 2. Le résultat d'intégration nécessaire à la démonstration est alors beaucoup plus simple (*loc. cit.* théorème (4.12)).

Remarque 2.

On montre de la même manière que la forme bilinéaire Δ induit des bijections de $L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(X, \rho)$ sur le dual topologique de $L^1_c(X, \pi)$ et de $L^{\infty}_c(X, \pi)$ sur le dual topologique de $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \rho)$ (*loc. cit.* théorème (6.16)).

Remarque 3.

Il résulte de l'hypocontinuité de la forme bilinéaire Δ que les bijections Δ_1 et Δ_2 sont continues (pour la topologie forte) et du théorème du graphe fermé que ce sont des isomorphismes.

On dit qu'une partie Y de X est une *pièce* si elle vérifie la condition suivante:

(P) Pour tout point x de X, il existe une carte ϕ de X dont le domaine U contient x telle que

$$\phi(U \cap Y) = \phi(U) \cap \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n \mid t_1 \leqslant 0\}.$$

Ceci implique en particulier que Y est fermée et que ∂Y est une sous-variété de X. Nous allons munir ∂Y d'une orientation naturelle que l'on dit *induite par* X. Tout d'abord, si n est égal à 1, le bord de Y est de dimension 0. On munit tout point x de ∂Y de l'orientation 1 (resp. -1) (§ 1, remarque 2) s'il existe une carte orientée ϕ de domaine U centrée en x telle que

$$\phi(U \cap Y) = \phi(U) \cap \{t \in \mathbf{R} \mid t \leqslant 0\}$$
$$(\text{resp. } \phi(U \cap Y) = \phi(U) \cap \{t \in \mathbf{R} \mid t \geqslant 0\}).$$

Supposons n au moins égal à 2. Quitte à remplacer ϕ_n par $-\phi_n$, on peut supposer que les cartes qui vérifient la condition (P) sont orientées. Leurs restrictions à ∂Y forment alors un atlas orienté dont la classe est par définition l'orientation induite.

THÉORÈME 2 (Stokes). *Pour toute pièce Y de X et toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^1_c(X, \Omega^{n-1}_{\mathbf{C}})$, on a*

$$\int_{\partial Y} \imath^*(u) = \int_Y du$$

où $\imath$ désigne l'injection canonique de ∂Y dans X.

On se ramène immédiatement au cas où X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$ et où Y est de la forme

$$Y = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X \mid x_1 \leqslant 0\}.$$

Par linéarité, on peut supposer que u est donnée par

$$u = f\,dx_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx_j} \ldots \wedge dx_n$$

où f est une fonction de $\mathscr{C}^1_c(X, \mathbf{R})$. On a

$$du = (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n .$$

Supposons tout d'abord j égal à 1. On a par définition

$$\iota^*(u) = (f \cdot \iota)\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

et par conséquent

$$\int_Y \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \left(\int_{x_1 \leqslant 0} \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \int_{\mathbf{R}^{n-1}} f(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n$$

ce qui démontre l'assertion dans ce cas.

Supposons j strictement supérieur à 1. On a alors

$$\iota^*(u) = 0$$

et d'autre part

$$\int_Y \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_{x_1 \leqslant 0} \left(\int_{\mathbf{R}} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j \right) dx_1 \ldots \hat{dx_j} \ldots dx_n = 0$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. *Soient u et v deux formes différentielles de $\mathscr{C}^1(X, \Omega^r_{\mathbf{C}})$ et $\mathscr{C}^1_c(X, \Omega^{n-r-1}_{\mathbf{C}})$ respectivement. Pour toute pièce Y de X, on a*

$$\int_Y du \wedge v = \int_{\partial Y} \iota^*(u \wedge v) + (-1)^{r+1} \int_Y u \wedge dv$$

En particulier, on a

$$\int_X du \wedge v = (-1)^{r+1} \int_X u \wedge dv .$$

C'est une conséquence immédiate du théorème 2 et de la formule

$$d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^r u \wedge dv .$$

On appelle *complexe de de Rham de* X la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d^0} \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1) \xrightarrow{d^1} \ldots \xrightarrow{d^{n-1}} \mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n) \longrightarrow 0$$

où d^r désigne la restriction de la différentielle d aux formes homogènes de degré r. On appelle *groupes de cohomologie de* X les espaces vectoriels

$$\mathbf{H}^r(X, \mathbf{R}) = \operatorname{Ker} d^r / \operatorname{Im} d^{r-1} .$$

La différentielle diminuant les supports, on a une deuxième suite

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}_c^\infty(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d_c^0} \mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^1) \xrightarrow{d_c^1} \ldots \xrightarrow{d_c^{n-1}} \mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^n) \longrightarrow 0$$

et des groupes de cohomologie correspondants

$$\mathbf{H}_c^r(X, \mathbf{R}) = \operatorname{Ker} d_c^r / \operatorname{Im} d_c^{r-1} .$$

Le noyau de d^0 s'identifie aux fonctions localement constantes sur X. Si X est connexe, on a donc

$$\mathbf{H}^0(X, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$$

et si X est ouverte, l'espace vectoriel $\mathbf{H}_c^0(X, \mathbf{R})$ est nul.

La formule de Stokes montre que l'intégration des formes différentielles de degré n induit par passage au quotient une forme linéaire canonique i sur $\mathbf{H}_c^n(X, \mathbf{R})$.

THÉORÈME 3. *Si X est connexe, la forme linéaire i est un isomorphisme. Si X est ouverte, l'espace vectoriel $\mathbf{H}^n(X, \mathbf{R})$ est nul.*

Si X est un cube de $\mathbf{R}^n$, l'assertion résulte du lemme de Poincaré (§ 3, propositions 1 et 2).

Passons au cas général. Désignons par U_0 un domaine de carte isomorphe à un cube. Nous allons montrer qu'il existe pour toute forme u de $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^n)$ des formes u_0 et v de $\mathscr{C}_c^\infty(U_0, \Omega^n)$ et $\mathscr{C}_c^\infty(X, \Omega^{n-1})$ respectivement telles que

$$u = u_0 + dv$$

ce qui établira la première assertion.

Par partition de l'unité, on voit aisément que l'on peut supposer le support de u contenu dans un domaine de carte isomorphe à un cube. On construit alors une suite $U_1, \ldots, U_k$ de tels domaines vérifiant les conditions suivantes:

(1) Pour tout entier j compris entre 1 et k, l'ensemble $U_j \cap U_{j-1}$ est non vide.

(2) Le support de u est contenu dans U_k.

Par récurrence descendante sur l'entier j, le lemme de Poincaré (§ 3, proposition 2) montre qu'il existe des formes u_{j-1} et v_{j-1} de $\mathscr{C}^\infty_c(U_{j-1}, \Omega^n)$ et $\mathscr{C}^\infty_c(X, \Omega^{n-1})$ respectivement telles que

$$u_k = u \quad \text{et} \quad u_j = u_{j-1} + dv_{j-1}\,.$$

Il suffit alors de prendre pour v la somme des v_j.

Supposons X ouverte et montrons que toute forme u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^n)$ est exacte. Désignons par $(K_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une suite exhaustive de parties compactes de X (avec K_0 vide pour fixer les idées) telles que $X\backslash K_j$ n'ait pas de composante connexe relativement compacte dans X (appendice II, lemme 6) et par $(\alpha_j)_{j\in\mathbf{N}}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement

$$(\mathring{K}_{j+2}\backslash K_j)_{j\in\mathbf{N}}\,.$$

La première partie du théorème montre qu'il existe des formes u_0 et v_0 de $\mathscr{C}^\infty_c(X\backslash K_1, \Omega^n)$ et $\mathscr{C}^\infty_c(X, \Omega^{n-1})$ respectivement telles que

$$\alpha_0 u = u_0 + dv_0\,.$$

Pour tout entier j strictement positif, on construit alors par récurrence des formes u_j et v_j de $\mathscr{C}^\infty_c(X\backslash K_{j+1}, \Omega^n)$ et $\mathscr{C}^\infty_c(X\backslash K_j, \Omega^{n-1})$ respectivement telles que

$$\alpha_j u + u_{j-1} = u_j + dv_j\,.$$

En effet, la restriction de $\alpha_j u + u_{j-1}$ à une composante connexe V de $X\backslash K_j$ est une forme différentielle de $\mathscr{C}^\infty_c(V, \Omega^n)$ et puisque $V\backslash K_{j+1}$ est non vide, l'assertion résulte de la première partie du théorème.

La famille des supports des v_j étant localement finie, la somme

$$v = \sum_{j\in\mathbf{N}} v_j$$

appartient à $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{n-1})$. On a alors

$$dv = \sum_{j\in\mathbf{N}} dv_j = \alpha_0 u - u_0 + \sum_{j\geq 1} (\alpha_j u + u_{j-1} - u_j) = \sum_{j\in\mathbf{N}} \alpha_j u = u\,,$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

THÉORÈME 4. *Soient X et Y deux variétés différentielles (orientées) de dimension pure n et soit h une application indéfiniment dérivable de X*

dans Y. *On suppose que* Y *est connexe et* h *propre* [1]). *Il existe alors un entier relatif* v *tel que*

$$\int_X h^*(u) = v \int_Y u$$

pour toute forme différentielle u *de* $\mathscr{C}_c^\infty(Y, \Omega^n)$.

La forme linéaire λ définie sur $\mathscr{C}_c^\infty(Y, \Omega^n)$ par

$$\lambda(u) = \int_X h^*(u)$$

induit par passage au quotient une forme linéaire sur $\mathbf{H}_c^n(Y, \mathbf{R})$. Il résulte du théorème 3 que cette forme linéaire est proportionnelle à i. Tout revient à montrer que le facteur de proportionnalité est un entier.

Désignons par y une valeur régulière de h (§ 1, théorème 2), par ψ une carte orientée de centre y et de domaine V dans Y et par $x_1, \ldots, x_p$ les points de $h^{-1}(y)$. Si V est suffisamment petit, l'application h induit pour tout entier j compris entre 1 et p un isomorphisme h_j de U_j sur V, où U_j désigne la composante connexe de x_j dans $h^{-1}(V)$ (§ 1, théorème 1). Posons

$$\begin{cases} \varepsilon(j) = 1 & \text{si } \psi \cdot h_j \text{ est une carte orientée de } X \\ \varepsilon(j) = -1 & \text{si } \psi \cdot h_j \text{ n'est pas une carte orientée de } X. \end{cases}$$

Pour toute forme différentielle u de $\mathscr{C}_c^\infty(V, \Omega^n)$, on a

$$\int_X h^*(u) = \sum_{1 \leq j \leq p} \int_{U_j} h^*(u) = \sum_{1 \leq j \leq p} \varepsilon(j) \int_Y u$$

ce qui démontre l'assertion.

L'entier v du théorème 4 s'appelle le *degré de* u et se désigne par $\deg(u)$.

Remarque 4.

La considération des formes différentielles complexes sur X permet d'introduire des groupes de cohomologie $\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C})$ et $\mathbf{H}_c^r(X, \mathbf{C})$. On notera que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C}) = \mathbf{H}^r(X, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{C} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_c^r(X, \mathbf{C}) = \mathbf{H}_c^r(X, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{C}.$$

Soit X une variété différentielle et soit $g = (g_\kappa)$ un cocycle complexe de rang 1 subordonné à un recouvrement ouvert $\mathscr{U} = (U_\iota)_{\iota \in I}$ de X. Pour tout couple (ι, κ) d'indices, on désigne par $u_{\kappa\iota}$ la forme différentielle

$$\frac{1}{2i\pi} \frac{dg_{\kappa\iota}}{g_{\kappa\iota}}.$$

---

[1]) Ceci signifie que l'image réciproque par h de toute partie compacte de Y est une partie compacte de X.

Il existe pour tout indice ι une forme u_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ telle que

$$u_{\kappa\iota} = u_\iota - u_\kappa$$

en tout point de $U_\iota \cap U_\kappa$ (§ 2, lemme 1). En particulier, puisque $u_{\kappa\iota}$ est fermée, les différentielles du_ι se recollent en une forme fermée v homogène de degré 2.

Montrons que la classe de v dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ ne dépend que de g. En effet, si l'on a

$$u_{\kappa\iota} = u'_\iota - u'_\kappa$$

pour certaines formes u'_ι de $\mathscr{C}^\infty(U_\iota, \Omega^1_{\mathbf{C}})$, les formes du'_ι se recollent en une forme v' de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^2_{\mathbf{C}})$, les $u'_\iota - u_\iota$ en une forme u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ et l'on a

$$v' = v + du$$

ce qui démontre l'assertion.

La classe de $-v$ dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$ s'appelle la *classe de Chern de* g et se désigne par $\mathrm{ch}(g)$.

LEMME 3. *Pour tout recouvrement ouvert* $\mathscr{U}$ *de* X, *la classe de Chern induit un homomorphisme de* $\mathrm{Pic}(\mathscr{U}, \mathbf{C}^*)$ *dans* $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$. *Si* $\mathscr{V}$ *est un recouvrement ouvert de* X *plus fin que* $\mathscr{U}$, *le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(\mathscr{U}, \mathbf{C}^*) & \xrightarrow{\sigma(\mathscr{V},\mathscr{U})} & \mathrm{Pic}(\mathscr{V}, \mathbf{C}^*) \\ {\scriptstyle \mathrm{ch}}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle \mathrm{ch}} \\ & \mathbf{H}^2(X, \mathbf{C}) & \end{array}$$

La démonstration est laissée en exercice au lecteur.

Par passage à la limite inductive, on obtient donc un homomorphisme canonique ch de $\mathrm{Pic}(X, \mathbf{C}^*)$ dans $\mathbf{H}^2(X, \mathbf{C})$. On appelle *classe de Chern d'un fibré en droites complexes* π *sur* X et l'on désigne par $\mathrm{ch}(\pi)$ la classe de Chern du fibré principal associé à π (§ 2, scholie).

§ 5. COHOMOLOGIE DES SURFACES

Dans tout ce paragraphe, on désigne par X une surface différentielle connexe et orientée.

Désignons par γ une application indéfiniment dérivable définie sur un ensemble ouvert W de $\mathbf{R}$ à valeurs dans X, et par u une forme différentielle de $\mathscr{C}^0(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$. Il est clair que la restriction de $\gamma^*(u)$ à tout intervalle fermé de W ne dépend que de la restriction de γ à cet intervalle.