

§ 3. Calcul différentiel

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **17.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

THÉOREME 1. Soit X une variété différentielle de dimension pure n et soit π un fibré vectoriel de rang pur n sur X . On suppose que X est ouverte ¹⁾. Il existe alors une section s de $\mathcal{C}^\infty(X, \pi)$ partout non nulle.

On suppose X connexe et l'on désigne par $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de parties compactes de X telles que $X \setminus K_j$ n'ait aucune composante connexe relativement compacte dans X (appendice II, lemme 6). On va construire par récurrence sur j une section transverse s_j de π qui coïncide avec s_{j-1} sur K_{j-1} et qui ne s'annule pas sur K_j . Ceci établira l'assertion. On suppose que K_0 est vide et l'on prend pour s_0 une section transverse quelconque de π (il en existe en vertu du lemme 5). Supposons s_j construite; on désigne par A l'ensemble de ses zéros (c'est un ensemble fermé et discret puisqu'elle est transverse et puisque le rang de π est égal à la dimension de X) et par $\{x_1, \dots, x_p\}$ l'intersection de A et de K_{j+1} . Il existe un ensemble de points $\{y_1, \dots, y_p\}$ deux à deux distincts dans $X \setminus (K_{j+1} \cup A)$ tel que x_k et y_k se trouvent dans la même composante connexe de $X \setminus K_j$.

Désignons par V_1 un voisinage connexe de $\{x_1, y_1\}$ dans $X \setminus K_j$ tel que x_1 soit le seul zéro de s_j dans V_1 . Il existe une section transverse t_1 de π qui coïncide avec s_j sur $X \setminus V_1$ et dont le seul zéro dans V_1 soit y_1 (lemme 6). On construit de la même manière et par récurrence sur k un voisinage connexe V_k de $\{x_k, y_k\}$ dans $X \setminus K_j$ tel que x_k soit le seul zéro de t_{k-1} dans V_k et une section transverse t_k de π qui coïncide avec t_{k-1} sur $X \setminus V_k$ et dont le seul zéro dans V_k soit y_k . Il suffit alors de prendre pour s_{j+1} la section t_p .

COROLLAIRE. Tout fibré vectoriel complexe de rang 1 sur une surface différentielle ouverte est trivial.

Remarque 2.

Tout fibré vectoriel complexe π sur une surface différentielle ouverte est trivial: la démonstration se fait par récurrence sur le rang de π . Elle est laissée en exercice au lecteur (voir chap. V, § 4, théorème 6).

§ 3. CALCUL DIFFÉRENTIEL

Dans tout ce paragraphe, on désigne par X une variété différentielle de dimension pure n .

¹⁾ On dit qu'une variété est *ouverte* si aucune de ses composantes connexes n'est compacte.

Pour tout point x de X , l'algèbre A_x^k des germes en x de fonctions k -fois continûment dérivables à valeurs réelles possède un unique idéal maximal $\underline{m}(A_x^k)$, à savoir l'idéal des germes de fonctions qui s'annulent au point x .

Soient ϕ et ψ deux cartes de X dont les domaines contiennent x . On désigne par γ le changement de cartes de ϕ dans ψ . Pour toute fonction f continûment dérivable au voisinage de x , on a

$$Df_\phi(\phi(x)) = Df_\psi(\psi(x)) \cdot D\gamma(\phi(x)).$$

En particulier, la condition

$$Df_\phi(\phi(x)) = 0$$

ne dépend que du germe de f au point x (et non de la carte ϕ).

Supposons k strictement positif. On dit qu'un germe de $\underline{m}(A_x^k)$ est *stationnaire* s'il vérifie cette condition. L'ensemble des germes stationnaires est un idéal $\underline{a}(A_x^k)$ de A_x^k et on a les inclusions

$$\underline{m}^2(A_x^k) \subset \underline{a}(A_x^k) \subset \underline{m}(A_x^k).$$

Pour toute carte ϕ de X dont le domaine contient x , on désigne par $\varepsilon_{x,\phi}$ l'application linéaire de A_x^k dans $(\mathbf{R}^n)^*$ définie par

$$\varepsilon_{x,\phi}(f) = Df_\phi(\phi(x)).$$

LEMME 1. *Par restriction et passage au quotient, l'application $\varepsilon_{x,\phi}$ induit un isomorphisme de $\underline{m}(A_x^k)/\underline{a}(A_x^k)$ sur $(\mathbf{R}^n)^*$.*

L'application induite est injective par définition même de $\underline{a}(A_x^k)$. D'autre part, pour toute forme linéaire α sur $\mathbf{R}^n$, le germe en x de la fonction

$$\alpha \cdot \phi - (\alpha \cdot \phi)(x)$$

a pour image α ce qui démontre l'assertion.

On appelle *espace cotangent* à X au point x et l'on désigne par Ω_x^1 l'espace vectoriel $\underline{m}(A_x^1)/\underline{a}(A_x^1)$. Il résulte du lemme 1 que Ω_x^1 est de dimension n et que l'injection canonique de A_x^k dans A_x^1 induit un isomorphisme de $\underline{m}(A_x^k)/\underline{a}(A_x^k)$ sur Ω_x^1 pour tout entier k strictement positif.

LEMME 2. *Il existe des germes $u_1, \dots, u_n$ de $\underline{m}(A_x^\infty)$ tels que tout germe f de $\underline{a}(A_x^k)$ s'écrive*

$$f = \sum_{1 \leq j \leq n} f_j u_j$$

avec $f_1, \dots, f_n$ dans $\underline{m}(A_x^{k-1})$.

En particulier, on a

$$\underline{a}(A_x^\infty) = \underline{m}^2(A_x^\infty).$$

La question étant locale, on peut supposer que X est un ensemble ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$. Pour toute fonction f de $\mathcal{C}^k(X, \mathbf{R})$ et tout point y de X , on a

$$f(y) - f(x) = \sum_{1 \leq j \leq n} f_j(y)(y_j - x_j)$$

où l'on a posé

$$f_j(y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(ty + (1-t)x) dt.$$

On en déduit aisément l'assertion.

On appelle *différentielle d'un germe f de A_x^1* et l'on désigne par df la classe dans Ω_x^1 du germe $f - f(x)$.

LEMME 3. *L'application d de A_x^1 dans Ω_x^1 est linéaire et l'on a*

$$d(fg) = g(x)df + f(x)dg$$

pour tout couple (f, g) d'éléments de A_x^1 .

La première assertion est évidente. La seconde résulte de la formule

$$\begin{aligned} fg - f(x)g(x) &= g(x)(f - f(x)) + f(x)(g - g(x)) \\ &\quad + (f - f(x))(g - g(x)). \end{aligned}$$

Soit ϕ une carte de domaine U dans X . On désigne par $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et par $\phi_1, \dots, \phi_n$ les fonctions coordonnées de ϕ .

Pour toute fonction f de $\mathcal{C}^k(X, \mathbf{R})$, on définit des fonctions $\frac{\partial f}{\partial \phi_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \phi_n}$ de $\mathcal{C}^{k-1}(U, \mathbf{R})$ en posant

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_j}(x) = \varepsilon_{x, \phi}(f_x)(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi(x)).$$

Remarquons que si X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$ et si ϕ est l'injection canonique de X dans $\mathbf{R}^n$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial \phi_j}$ coïncide avec la dérivée partielle

usuelle $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de la règle de dérivation des fonctions composées.

LEMME 4. Soient ϕ et ψ deux cartes de X et soit f une fonction de $\mathcal{C}^1(X, \mathbf{R})$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_j} = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial f}{\partial \psi_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial \phi_j}.$$

LEMME 5. Pour toute carte ϕ de X et pour tout point x du domaine de ϕ , les différentielles des germes $\phi_{1,x}, \dots, \phi_{n,x}$ forment une base de Ω_x^1 . Pour tout germe f de A_x^1 , on a

$$df = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial \phi_j}(x) d\phi_{j,x}.$$

C'est une conséquence immédiate des définitions et du lemme 1.

Soit π la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \Omega_x^1$ dans X et soient ϕ et ψ des cartes de domaines respectifs U et V dans X . Le lemme 1 montre que les applications

$$\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times (\mathbf{R}^n)^* \quad \text{et} \quad \tilde{\psi} : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times (\mathbf{R}^n)^*$$

définies par

$$\tilde{\phi}(x, y) = (x, \varepsilon_{x,\phi}(y)) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}(x, y) = (x, \varepsilon_{x,\psi}(y))$$

sont des cartes de π . Ces cartes sont compatibles, la transition est donnée par la formule

$$g(x) = {}^t D\gamma(\phi(x))^{-1}$$

où γ désigne le changement de cartes de ϕ dans ψ .

Le fibré vectoriel réel de rang n ainsi défini s'appelle le *fibré cotangent* à X et se désigne par Ω^1 (ou $\Omega^1(X)$ s'il y a risque de confusion).

Pour tout entier r , on désigne par Ω^r le fibré vectoriel $\Lambda^r \Omega^1$ et par Ω le fibré vectoriel $\Lambda \Omega^1$.

On appelle *forme différentielle* toute section de Ω . La structure des fibres munit l'ensemble $\mathcal{F}(X, \Omega)$ de toutes les formes différentielles d'une structure de $\mathcal{F}(X, \mathbf{R})$ -algèbre graduée. Notons que $\mathcal{C}^k(X, \Omega)$ en est une sous- $\mathcal{C}^k(X, \mathbf{R})$ -algèbre.

On dit qu'une forme différentielle est *homogène de degré r* si elle prend ses valeurs dans Ω^r .

On appelle *différentielle d'une fonction f de $\mathcal{C}^1(X, \mathbf{R})$* et l'on désigne par df la forme différentielle homogène de degré 1 définie par

$$df(x) = d(f_x).$$

Avec les notations précédentes, on a

$$(df)_{\tilde{\phi}} = Df_{\phi} \cdot \phi = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial \phi_j} d\phi_j.$$

En particulier, si f appartient à $\mathcal{C}^k(X, \mathbf{R})$, alors df appartient à $\mathcal{C}^{k-1}(X, \Omega^1)$.

Il résulte du lemme 5 que la restriction à U de toute forme différentielle s homogène de degré r s'écrit d'une manière et d'une seule

$$s|_U = \sum_{J \in S_r(n)} u_J d\phi_J$$

où $S_r(n)$ désigne l'ensemble des suites strictement croissantes de r entiers compris entre 1 et n et où l'on a posé

$$d\phi_J = d\phi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{j_r} \quad J = (j_1, \dots, j_r).$$

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de ces définitions et de ce qui précède (§ 1, proposition 1, corollaire).

LEMME 6. *Pour tout point x de X , il existe un voisinage V de x et des fonctions $v_1, \dots, v_n$ de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ vérifiant la condition suivante : pour toute forme différentielle s de $\mathcal{C}^k(X, \Omega^r)$, il existe des fonctions s_J de $\mathcal{C}^k(X, \mathbf{R})$ telles que*

$$s|_V = \sum_{J \in S_r(n)} s_J dv_J|_V.$$

THÉORÈME 1. *Il existe une application $\mathbf{R}$ -linéaire et une seule d de $\mathcal{C}^1(X, \Omega)$ dans $\mathcal{C}^0(X, \Omega)$ vérifiant les conditions suivantes :*

(1) *La restriction de d à $\mathcal{C}^1(X, \mathbf{R})$ coïncide avec la différentielle des fonctions.*

(2) *Pour toute fonction f de $\mathcal{C}^2(X, \mathbf{R})$, on a*

$$d(df) = 0.$$

(3) *Pour tout couple (u, v) d'éléments de $\mathcal{C}^1(X, \Omega)$, avec u homogène de degré r , on a*

$$d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^r u \wedge dv.$$

De plus, l'opérateur d vérifie les conditions suivantes :

(4) *Pour toute forme différentielle u de $\mathcal{C}^1(X, \Omega)$, le support de du est contenu dans le support de u .*

(5) *Pour toute forme différentielle u de $\mathcal{C}^2(X, \Omega)$, on a*

$$d(du) = 0.$$

(6) Pour toute forme différentielle u de $\mathcal{C}^k(X, \Omega^r)$, la forme du appartient à $\mathcal{C}^{k-1}(X, \Omega^{r+1})$.

Montrons tout d'abord que si d vérifie (1), (2) et (3), il vérifie aussi (4), (5) et (6).

Soit u une forme différentielle de $\mathcal{C}^1(X, \Omega)$ nulle sur un ensemble ouvert V de X . Pour tout point x de V , il existe une fonction α de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{R})$ égale à 1 au voisinage de x . On a d'après (1) et (3),

$$0 = d(\alpha u) = d\alpha \wedge u + \alpha du$$

et puisque le germe de $\alpha - 1$ au point x est stationnaire, on en déduit que $du(x)$ est nul.

Pour démontrer (5), on peut supposer u de la forme

$$u = f dv_1 \wedge \dots \wedge dv_r$$

où f est une fonction de $\mathcal{C}^2(X, \mathbf{R})$ et $v_1, \dots, v_r$ des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ (lemme 6). Par récurrence sur r , on déduit alors de (1), (2) et (3) que l'on a

$$du = df \wedge dv_1 \wedge \dots \wedge dv_r$$

(ce qui en passant démontre (6) et l'unicité de d). De même,

$$d(du) = 0.$$

Il reste à montrer l'existence de d . Par localisation et unicité, on peut supposer que X est un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$. Pour toute forme différentielle

$$u = \sum_{J \in S_r(n)} u_J dx_J,$$

où les fonctions u_J appartiennent à $\mathcal{C}^1(X, \mathbf{R})$ et pour tout entier j compris entre 1 et n , on pose

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{J \in S_r(n)} \frac{\partial u_J}{\partial x_j} dx_J \quad \text{et} \quad du = \sum_{1 \leq j \leq n} dx_j \wedge \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Si u est de degré 0, cette définition coïncide avec celle de la différentielle d'une fonction. Si de plus u appartient à $\mathcal{C}^2(X, \mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned} d(du) &= \sum_{1 \leq j, k \leq n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} dx_j \wedge dx_k \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_k = 0. \end{aligned}$$

Montrons enfin la condition (3). On peut supposer u et v de la forme

$$u = f dx_J \quad \text{et} \quad v = g dx_K$$

où J appartient à $S_r(n)$ et K à $S_s(n)$. On a alors

$$\begin{aligned} d(u \wedge v) &= \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial(fg)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_J \wedge dx_K \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_j} g dx_j \wedge dx_J \wedge dx_K + (-1)^r \sum_{1 \leq j \leq n} f \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_J \wedge dx_j \wedge dx_K \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

On appelle *différentielle d'une forme* u de $\mathcal{C}^1(X, \Omega)$ la forme différentielle du définie dans le théorème 1. On dit qu'une forme différentielle est *fermée* (resp. *exacte*) si elle appartient au noyau (resp. à l'image) de d .

Soit h une application indéfiniment dérivable de X dans une variété différentielle Y de dimension pure m .

Pour tout point x de X , la composition des applications induit un homomorphisme

$$h_x^* : A_{h(x)}^1 \rightarrow A_x^1$$

qui envoie l'idéal maximal (resp. l'idéal des germes stationnaires) de $A_{h(x)}^1$ dans l'idéal correspondant de A_x^1 . Par restriction et passage aux quotients, on en déduit une application linéaire de $\Omega_{h(x)}^1(Y)$ dans $\Omega_x^1(X)$ que l'on appelle l'*application cotangente à h au point x* . Par passage à l'algèbre extérieure, cette application définit un homomorphisme de $\Omega_{h(x)}(Y)$ dans $\Omega_x(X)$ que l'on désigne encore par h_x^* .

Pour toute forme différentielle u sur Y , on définit une forme différentielle $h^*(u)$ sur X appelée l'*image réciproque de u par h* en posant

$$h^*(u)(x) = h_x^*(u(h(x))).$$

Cette application induit un homomorphisme de $\mathcal{F}(Y, \Omega)$ dans $\mathcal{F}(X, \Omega)$.

Désignons par ϕ une carte de domaine U dans X et par ψ une carte de domaine V contenant $h(U)$ dans Y . On a par définition

$$h^*(d\psi_j) = d(\psi_j \cdot h) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial(\psi_j \cdot h)}{\partial \phi_k} d\phi_k$$

pour tout entier j compris entre 1 et m . Si u est homogène de degré r , on a

$$u|_V = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m} u_{j_1, \dots, j_r} d\psi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\psi_{j_r}$$

et par conséquent

$$h^*(u)|_U = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq m} (u_{j_1}, \dots, u_{j_r} \cdot h) d(\psi_{j_1} \cdot h) \wedge \dots \wedge d(\psi_{j_r} \cdot h).$$

En particulier, si u appartient à $\mathcal{C}^k(Y, \Omega)$, alors $h^*(u)$ appartient à $\mathcal{C}^k(X, \Omega)$ et si k est strictement positif, on a

$$h^*(du) = dh^*(u).$$

PROPOSITION 1 (Lemme de Poincaré). *Désignons par X un voisinage convexe de l'origine dans $\mathbf{R}^n$. Il existe une application linéaire k de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega)$ dans lui-même telle que*

$$d \cdot k + k \cdot d = 1 - \varepsilon$$

où ε désigne la forme linéaire sur $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega)$ qui associe à toute forme différentielle la valeur à l'origine de sa partie homogène de degré 0.

On désigne par I l'intervalle ouvert $]0, 1[$ et par h l'application de $I \times X$ dans X définie par

$$h(t, x) = tx.$$

Pour toute forme différentielle

$$v = \sum_{J \in S_r(n)} v_J dx_J$$

sur $I \times X$ indépendante de dt , on pose

$$d_X v = \sum_{1 \leq j \leq n} dx_j \wedge \frac{\partial v}{\partial x_j} = dv - dt \wedge \frac{\partial v}{\partial t}$$

et

$$\int_0^1 v dt = \sum_{J \in S_r(n)} \left(\int_0^1 v_J dt \right) dx_J.$$

Pour toute forme différentielle

$$u = \sum_{J \in S_r(n)} u_J dx_J$$

sur X , l'image réciproque $h^*(u)$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$h^*(u) = u_1 + dt \wedge u_2$$

où les formes différentielles u_1 et u_2 sont indépendantes de dt . Notons que les coefficients a_J de u_1 sont donnés par la formule

$$a_J(t, x) = t^r u_J(tx).$$

On pose alors

$$k(u) = \int_0^1 u_2 dt.$$

L'image réciproque de la différentielle de u est donnée par la formule

$$h^*(du) = dh^*(u) = d_X u_1 + dt \wedge \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - d_X u_2 \right)$$

et par conséquent

$$(k \cdot d)(u) = \int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial t} dt - \int_0^1 (d_X u_2) dt$$

On conclut en remarquant que l'on a

$$\int_0^1 (d_X u_2) dt = d \left(\int_0^1 u_2 dt \right) = (d \cdot k)(u)$$

et

$$\begin{cases} \int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial t} dt = u & \text{si } r \neq 0 \\ \int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial t} dt = u - u(0) & \text{si } r = 0. \end{cases}$$

Il résulte du lemme de Poincaré que la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \rightarrow \mathbf{R} \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d} \mathcal{C}^\infty(X, \Omega^1) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{C}^\infty(X, \Omega^n) \rightarrow 0$$

où ι désigne l'injection canonique de $\mathbf{R}$ dans les fonctions constantes, est exacte pour tout ensemble ouvert convexe (non vide) de $\mathbf{R}^n$.

Soit X un ensemble ouvert de $\mathbf{R}^n$. Toute forme différentielle u de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \Omega)$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$u = \sum_J u_J dx_J$$

où J parcourt l'ensemble de toutes les suites strictement croissantes d'entiers compris entre 1 et n . On pose

$$i(u) = \int_X u_1, \dots, n dt_1 \dots dt_n.$$

PROPOSITION 2 (Lemme de Poincaré). *Désignons par X un cube ouvert de $\mathbf{R}^n$. Il existe une forme différentielle ω de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \Omega^n)$ et une application linéaire k de $\mathcal{C}_c^\infty(X, \Omega)$ dans lui-même telles que*

$$i(\omega) = 1 \quad \text{et} \quad d \cdot k + k \cdot d = 1 - \omega i.$$

Pour tout entier j compris entre 0 et n , on désigne par A_j l'ensemble des formes différentielles de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega)$ indépendantes de $dx_1, \dots, dx_j$. Notons que l'on a

$$A_0 = \mathcal{C}_c^\infty(X, \Omega) \quad \text{et} \quad A_n = \mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{R}).$$

On désigne par d_j l'application de A_j dans lui-même définie par

$$d_j u = \sum_{j+1 \leq k \leq n} dx_k \wedge \frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

Notons que d_n est identiquement nulle et que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ commute avec d_j pour k compris entre 1 et n .

Désignons par I le côté de X . On définit une application i_j de A_j dans $C^\infty(I^j, \mathbf{R})$ en posant

$$i_j(u)(x_1, \dots, x_j) = \int_{I^{n-j}} u_{j+1, \dots, n}(x_1, \dots, x_j, t_{j+1}, \dots, t_n) dt_{j+1} \dots dt_n$$

où $u_{j+1, \dots, n}$ désigne le coefficient de la partie homogène de degré $n-j$ dans u . Notons que i_n est l'application identique et que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ commute avec i_j pour k compris entre 1 et j .

La formule fondamentale du calcul différentiel et intégral montre que l'on a

$$i_j(d_j u) = \sum_{j+1 \leq k \leq n} (-1)^{k-j-1} \int_{I^{n-j}} \frac{\partial u_{j+1, \dots, \hat{k}, \dots, n}}{\partial x_k} dt_{j+1} \dots dt_n = 0.$$

Choisissons une fonction α de $\mathcal{C}_c^\infty(I, \mathbf{R})$ telle que

$$\int_I \alpha(t) dt = 1$$

et posons

$$\omega_j(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{j+1 \leq k \leq n} \alpha(x_k) dx_k.$$

Notons que ω_n est la fonction constante 1 et que $i_0(\omega_0)$ est égal à 1.

Par récurrence descendante sur j , nous allons construire une application linéaire k_j de A_j dans lui-même qui commute avec l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ pour k compris entre 1 et j et telle que

$$d_j \cdot k_j + k_j \cdot d_j = 1 - \omega_j i_j.$$

On prend pour k_n l'application identique de A_n . Supposons j inférieur ou égal à n et k_j construit. Toute forme différentielle u de A_{j-1} s'écrit d'une manière et d'une seule

$$u = u_1 + dx_j \wedge u_2$$

avec u_1 et u_2 dans A_j . Notons que l'on a

$$d_{j-1}(u) = d_j u_1 + dx_j \wedge \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} - d_j u_2 \right).$$

On pose alors

$$l(u)(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_j} (i_j(u_2)(x_1, \dots, x_{j-1}, t) - i_{j-1}(u)(x_1, \dots, x_{j-1}) \alpha(t)) dt.$$

Il est clair que l est une application linéaire de A_{j-1} dans $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbf{R})$ qui commute avec l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_k}$ pour k compris entre 1 et $j-1$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (l(u))(x_1, \dots, x_n) &= i_j(u_2)(x_1, \dots, x_j) - i_{j-1}(u)(x_1, \dots, x_{j-1}) \alpha(x_j) \\ l(d_{j-1} u)(x_1, \dots, x_n) &= i_j(u_1)(x_1, \dots, x_j). \end{aligned}$$

On pose finalement

$$k_{j-1}(u) = k_j(u_1) - dx_j \wedge k_j(u_2) + l(u) \omega_j$$

et l'on vérifie aisément l'assertion.

Il résulte du lemme de Poincaré que la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_c^\infty(X, \mathbf{R}) \xrightarrow{d} \mathcal{C}_c^\infty(X, \Omega^1) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{C}_c^\infty(X, \Omega^n) \xrightarrow{i} \mathbf{R} \rightarrow 0$$

est exacte pour tout cube ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Remarque 1.

Toutes les constructions et les résultats de ce paragraphe demeurent valables si l'on utilise les germes de fonctions à valeurs complexes. On obtient alors le *fibré cotangent complexe* à X désigné par Ω_C^1 . Pour tout point x de X et toute carte ϕ dont le domaine contient x , l'application $\varepsilon_{x,\phi}$ identifie $\Omega_{C,x}^1$ à $\text{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ (lemme 1). On désigne de même par Ω_C^r et Ω_C les fibrés vectoriels $\Lambda^r \Omega_C^1$ et $\Lambda \Omega_C^1$. Notons que l'on a des isomorphismes canoniques

$$\Omega_C^r = \Omega^r \otimes \mathbf{C}_X \quad \text{et} \quad \Omega_C = \Omega \otimes \mathbf{C}_X.$$

§ 4. CALCUL INTÉGRAL

LEMME 1. *Pour qu'une variété différentielle X de dimension pure n soit orientable, il faut et il suffit que le fibré Ω^n soit trivial.*

Désignons par $(\phi_i)_{i \in I}$ un atlas orienté de X et par $(\alpha_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ formé des domaines de