

# 4. DÉTERMINATION DE LA SÉRIE DE FOURIER DE F

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$q^{k-1} x''_k = q^{k-1} x_k + 2q^{-1} = N_{k-1} + \frac{q+3}{2q},$$

et par suite, d'après la périodicité de  $g$ ,

$$\begin{aligned} g(q^{k-1} x''_k) - g(q^{k-1} x_k) &= g\left(\frac{q+3}{2q}\right) - g\left(\frac{q-1}{2q}\right) \\ &= \int_{\frac{q-1}{2q}}^{\frac{q+3}{2q}} \left( [qt] - q[t] - \frac{q-1}{2} \right) dt. \end{aligned}$$

Mais on a  $[t] = 0$  pour  $\frac{q-1}{2q} \leq t < \frac{q+3}{2q}$

et

$$\begin{aligned} [qt] &= \frac{q-1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{q-1}{2q} \leq t < \frac{q+1}{2q}, \\ [qt] &= \frac{q+1}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{q+1}{2q} \leq t < \frac{q+3}{2q}. \end{aligned}$$

Par suite

$$g(q^{k-1} x''_k) - g(q^{k-1} x_k) = \frac{1}{q}.$$

Finalement, on voit que, pour  $k > m$ ,

$$\rho'_k = \sum_{r=1}^m \left( \alpha_r - \frac{q-1}{2} \right) + \frac{1}{2}.$$

La suite  $\{\rho'_k\}$  ne tend donc pas vers  $\sum_{r=1}^m \left( \alpha_r - \frac{q-1}{2} \right)$ .

#### 4. DÉTERMINATION DE LA SÉRIE DE FOURIER DE $F$

Si l'on écrit la série de Fourier de  $F$  sous la forme

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k e^{2k\pi i x},$$

on a

$$c_k = \int_0^1 F(x) e^{-2k\pi i x} dx.$$

La formule (4) donne pour  $0 \leq x < 1$

$$F(x) = \frac{q-1}{2} (1-x) + q^{1-x} h(q^{x-1}).$$

On a donc  $c_k = a_k + b_k$ , avec

$$a_k = \frac{q-1}{2} \int_0^1 (1-x) e^{-2k\pi i x} dx \quad \text{et} \quad b_k = \int_0^1 q^{1-x} h(q^{x-1}) e^{-2k\pi i x} dx.$$

4.1. On voit immédiatement que

$$a_k = \frac{q-1}{4k\pi i} \quad \text{pour} \quad k \neq 0, \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{q-1}{4}.$$

4.2. D'après la formule (3), on a pour tout  $x$  réel

$$q^{1-x} h(q^{x-1}) e^{-2k\pi i x} = \sum_{r=0}^{\infty} q^{1-r-x} g(q^{r+x-1}) e^{-2k\pi i x}.$$

La série est d'ailleurs uniformément convergente pour  $0 \leq x \leq 1$

Il résulte de là que l'on a

$$b_k = \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^1 q^{1-r-x} g(q^{r+x-1}) e^{-2k\pi i x} dx.$$

Le changement de variable  $x = 1 - r + \frac{\log u}{\log q}$  donne

$$\int_0^1 q^{1-r-x} g(q^{r+x-1}) e^{-2k\pi i x} dx = \frac{1}{\log q} \int_{q^{r-1}}^{q^r} \frac{g(u)}{u^2} \exp\left(-2k\pi i \frac{\log u}{\log q}\right) du.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\log q} \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{g(u)}{u^2} \exp\left(-2k\pi i \frac{\log u}{\log q}\right) du \\ &= \frac{1}{\log q} \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{g(u)}{u^{2+2k\pi i/\log q}} du. \end{aligned}$$

4.3. Remarquons que l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{g(u)}{u^{s+1}} du$$

est absolument convergente pour  $\operatorname{Re} s > 0$  et, si l'on désigne par  $G(s)$  sa valeur, la fonction  $G$  ainsi définie est holomorphe pour  $\operatorname{Re} s > 0$ .

On voit que

$$b_k = \frac{1}{\log q} G\left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right)$$

et on est ainsi amené à déterminer la fonction  $G$ .

D'abord, comme

$$g(u) = \int_0^u \left( [qt] - q[t] - \frac{q-1}{2} \right) dt \quad \left( \text{et donc } g\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{q-1}{2q} \right),$$

une intégration par parties donne, pour  $\operatorname{Re} s > 0$ ,

$$G(s) = -\frac{q-1}{2} \cdot \frac{q^{s-1}}{s} + \frac{1}{s} \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \left( [qu] - q[u] - \frac{q-1}{2} \right) \frac{du}{u^s}.$$

Maintenant, si l'on suppose que  $\operatorname{Re} s > 2$ , on peut séparer l'intégrale en trois et l'écrire

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[qu]}{u^s} du - q \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[u]}{u^s} du - \frac{q-1}{2} \int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{du}{u^s}.$$

On a

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{du}{u^s} = \frac{q^{s-1}}{s-1},$$

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[u]}{u^s} du = \int_1^{\infty} \frac{[u]}{u^s} du = \frac{1}{s-1} \zeta(s-1)$$

d'après une formule connue <sup>10)</sup>, et, par le changement de variable  $u = \frac{t}{q}$ ,

$$\int_{\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{[qu]}{u^s} du = q^{s-1} \int_1^{\infty} \frac{[t]}{t^s} dt = \frac{q^{s-1}}{s-1} \zeta(s-1).$$

On trouve ainsi que, pour  $\text{Re } s > 2$ ,

$$(12) \quad G(s) = -\frac{q-1}{2} \cdot \frac{q^{s-1}}{s-1} + \frac{q^{s-1} - q}{s(s-1)} \zeta(s-1).$$

En raison de l'holomorphie de  $G$ , cette formule est valable pour  $\text{Re } s > 0, s \neq 1$ .

En particulier, pour  $k \neq 0$ ,

$$G\left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right) = \left(-\frac{q-1}{4k\pi i} + i \frac{q-1}{2k\pi} \left(1 + \frac{2k\pi i}{\log q}\right)^{-1} \zeta\left(\frac{2k\pi i}{\log q}\right)\right) \log q.$$

En examinant le comportement du second membre de (12) lorsque  $s$  tend vers 1, on retrouve le fait connu que  $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$  et on voit que

$$\begin{aligned} G(1) &= -\frac{q-1}{2} - \frac{q \log q}{2} - (q-1) \zeta'(0) \\ &= \frac{q-1}{2} (\log 2\pi - 1) - \frac{q \log q}{2} \text{ puisque } \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \log 2\pi. \end{aligned}$$

On a ainsi les valeurs de  $b_k$  pour tous les  $k \in \mathbf{Z}$ , et on trouve en définitive que

$$c_0 = \frac{q-1}{2 \log q} (\log 2\pi - 1) - \frac{q+1}{4}$$

<sup>10)</sup> On a pour  $\text{Re } s > 1$ :  $\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{[u]}{u^{s+1}} du$ .

On peut le voir simplement en remarquant que l'on a pour tout  $N$  entier  $> 1$

$$\begin{aligned} s \int_1^N \frac{[u]}{u^{s+1}} du &= \sum_{n=1}^{N-1} n \int_n^{n+1} \frac{sdu}{u^{s+1}} = \sum_{n=1}^{N-1} n \left( \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) + 2 \left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}\right) + 3 \left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s}\right) + \dots + (N-1) \left(\frac{1}{(N-1)^s} - \frac{1}{N^s}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^s} - \frac{N-1}{N^s}. \end{aligned}$$

et, pour  $k \neq 0$ ,

$$c_k = i \frac{q - 1}{2 k \pi} \left( 1 + \frac{2k\pi i}{\log q} \right)^{-1} \zeta \left( \frac{2k\pi i}{\log q} \right).$$

Comme, quand  $t$  tend vers l'infini,

$$\zeta(it) = O(|t|^{\frac{1}{2} + \varepsilon}) \text{ pour tout } \varepsilon > 0,$$

on voit que la série de Fourier de  $F$  est absolument convergente.

( Reçu le 25 février 1975 )

Hubert Delange

Université de Paris-Sud  
Mathématiques  
F-91405 Orsay

**Vide-leer-empty**