# 2. DÉMONSTRATION DE LA FORMULE (1)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

*est continue sur* **R** (et aussi périodique de période 1, mais cette propriété ne nous sert pas).

*Finalement on pose*

$$F(x) = \frac{q-1}{2}(1+[x]-x) + q^{1+[x]-x} h(q^{x-[x]-1}). \tag{4}$$

Il est clair que la fonction $F$ définie par cette formule est périodique de période 1, continue pour $x$ non entier, et continue à droite pour $x$ entier. On vérifie immédiatement qu'en fait elle est aussi continue pour $x$ entier: on a $F(1) = \frac{q-1}{2} + q\,h\left(\frac{1}{q}\right)$, ce qui est égal à 0 car, comme $g(x) = 0$ pour $x$ entier, la formule (3) donne $h\left(\frac{1}{q}\right) = g\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{q-1}{2q}$; or on voit que, quand $x$ tend vers 1 par valeurs inférieures, $F(x)$ tend vers $h(1) = 0$.

Nous compléterons notre résultat en montrant que la fonction $F$ n'est dérivable en aucun point et déterminant explicitement sa série de Fourier. Celle-ci est absolument convergente et ses coefficients s'expriment à l'aide des valeurs de la fonction $\zeta$ de Riemann aux points $\frac{2k\pi i}{\log q}$, où $k \in \mathbf{Z}^*$.[7])

## 2. Démonstration de la formule (1)

Soient $a_0(n)$, $a_1(n)$, $a_2(n)$, ... les chiffres de l'entier positif ou nul $n$ écrit en base $q$, lus de droite à gauche. En fait il y a seulement un nombre fini de chiffres, mais on peut former une suite infinie en complétant par des zéros.

Ainsi on a
$$n = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(n)\, q^r,$$
avec $0 \leqslant a_r(n) < q$ pour tout $r \geqslant 0$ et $a_r(n) = 0$ pour $r > \frac{\log n}{\log q}$.

On a aussi $S_q(n) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(n)$.

[7]) La possibilité de déterminer explicitement la série de Fourier de $F$ nous a été signalée par M. Mauclaire. Il l'obtenait à partir du résultat suivant, qu'il avait établi antérieurement:

On a pour $\operatorname{Re} s > 0$: $s \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{s+1}} S_q([t])\, dt = \frac{q^s - q}{q^s - 1} \zeta(s)$.

Nous donnerons ici un calcul direct.

*2.1.* Remarquons d'abord que l'on a pour chaque $r \geqslant 0$

$$a_r(n) = \left[\frac{n}{q^r}\right] - q\left[\frac{n}{q^{r+1}}\right]. \tag{5}$$

Cela résulte immédiatement de ce que l'on a pour chaque $k \geqslant 0$

$$\left[\frac{n}{q^k}\right] = \sum_{j=k}^{\infty} a_j(n)\, q^{j-k}.$$

Ceci est évidemment vrai pour $k = 0$. Pour $k \geqslant 1$ on peut écrire

$$\frac{n}{q^k} = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(n)\, q^{j-k} + \sum_{j=k}^{\infty} a_j(n)\, q^{j-k},$$

et on voit que la première somme au second membre est $\geqslant 0$ et $< 1$, tandis que la deuxième est un entier.

Comme, pour $n \leqslant t < n + 1$,

$$\left[\frac{t}{q^r}\right] = \left[\frac{n}{q^r}\right] \text{ et } \left[\frac{t}{q^{r+1}}\right] = \left[\frac{n}{q^{r+1}}\right],$$

on peut écrire (5) sous la forme

$$a_r(n) = \int_n^{n+1} \left(\left[\frac{t}{q^r}\right] - q\left[\frac{t}{q^{r+1}}\right]\right) dt. \tag{6}$$

*2.2.* Ceci dit, soit $m$ un entier $\geqslant 1$, et posons $l = \dfrac{\log m}{\log q}$.

On voit d'abord que, si $n < m$, on a $a_r(n) = 0$ pour $r > [l]$.

Ainsi on a pour chaque $n < m$

$$S_q(n) = \sum_{r=0}^{[l]} a_r(n).$$

Il en résulte que l'on a

$$\sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[l]} \left(\sum_{n=0}^{m-1} a_r(n)\right). \tag{7}$$

Mais la formule (6) donne

$$\sum_{n=0}^{m-1} a_r(n) = \int_0^m \left(\left[\frac{t}{q^r}\right] - q\left[\frac{t}{q^{r+1}}\right]\right) dt$$

$$= \int_0^m \left( \left[ \frac{t}{q^r} \right] - q \left[ \frac{t}{q^{r+1}} \right] - \frac{q-1}{2} \right) dt + m \frac{q-1}{2} .$$

En faisant le changement de variable $t = q^{r+1} u$, on voit que

$$\sum_{n=0}^{m-1} a_r(n) = q^{r+1} g(q^{-r-1} m) + m \frac{q-1}{2} .$$

En reportant cette valeur dans (7) on obtient

$$\sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1} m) + (1+[l]) m \frac{q-1}{2}$$

ou

$$(8) \qquad \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1} m) + (1+[l]) \frac{q-1}{2} .$$

En posant $r = [l] - k$, on a

$$\sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1} m) = \sum_{k=0}^{[l]} q^{1+[l]-k} g(mq^{k-[l]-1})$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} q^{1+[l]-k} g(mq^{k-[l]-1}) ,$$

puisque, pour $k > [l]$, $m\, q^{k-[l]-1}$ est un entier et $g(mq^{k-[l]-1}) = 0$.

En tenant compte de ce que $m = q^l$, ceci donne

$$\frac{1}{m} \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1} m) = q^{1+[l]-l} \sum_{k=0}^{\infty} q^{-k} g(q^k \cdot q^{l-[l]-1})$$
$$= q^{1+[l]-l} h(q^{l-[l]-1}) .$$

Ainsi (8) donne

$$\frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \frac{q-1}{2} l + \frac{q-1}{2} (1+[l]-l) + q^{1+[l]-l} h(q^{l-[l]-1})$$
$$= \frac{q-1}{2} l - F(l) ,$$

ce qui est le résultat désiré.

2.3. *Remarque :* On peut montrer que l'on a pour tout $x$ réel $\geqslant 1$

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) = \frac{q-1}{2 \log q} x \log x + x F\left(\frac{\log x}{\log q}\right) - h(x) + (1+[x]-x) S_q([x]) ,$$

formule qui donne (1) en prenant $x = m$.

En posant $\lambda = \dfrac{\log x}{\log q}$, on a

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[\lambda]} \left( \sum_{n \leq x} a_r(n) \right).$$

On déduit de (6) que l'on a

$$\sum_{n \leq x} a_r(n) = \int_0^x \left( \left[ \frac{t}{q^r} \right] - q \left[ \frac{t}{q^{r+1}} \right] \right) dt + (1 + [x] - x) \, a_r([x]) ,$$

$$= q^{r+1} g(q^{-r-1} x) + \frac{q-1}{2} x + (1 + [x] - x) \, a_r([x]) ,$$

d'où

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) =$$

$$\sum_{r=0}^{[\lambda]} q^{r+1} g(q^{-r-1} x) + \frac{q-1}{2} x (1 + [\lambda]) + (1 + [x] - x) \, S_q([x]) ,$$

puis on vérifie que

$$\sum_{r=0}^{[\lambda]} q^{r+1} g(q^{-r-1} x) = q^{1+[\lambda]} \sum_{k=0}^{[\lambda]} q^{-k} g(q^k \cdot q^{\lambda - [\lambda] - 1})$$

$$= x \, q^{1 + [\lambda] - \lambda} h(q^{\lambda - [\lambda] - 1}) - h(x) .$$

## 3. Démonstration de la non dérivabilité de la fonction $F$

Nous allons maintenant montrer que la fonction $F$ n'est dérivable en aucun point. En raison de la périodicité, il suffit de montrer qu'elle n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert ]0, 1[ et qu'elle n'est pas dérivable à gauche au point 1.

*3.1.* On voit que ceci se ramène à montrer que la fonction $h$ n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert $\left] \frac{1}{q}, 1 \right[$ et n'est pas dérivable à gauche au point 1.

En effet, si $\frac{1}{q} \leqslant t < 1$, on a $0 \leqslant 1 + \dfrac{\log t}{\log q} < 1$ et (4) donne