

## 2. DÉMONSTRATION DE LA FORMULE (1)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

est continue sur  $\mathbf{R}$  (et aussi périodique de période 1, mais cette propriété ne nous sert pas).

Finalement on pose

$$(4) \quad F(x) = \frac{q-1}{2} (1 + [x] - x) + q^{1+[x]-x} h(q^{x-[x]-1}).$$

Il est clair que la fonction  $F$  définie par cette formule est périodique de période 1, continue pour  $x$  non entier, et continue à droite pour  $x$  entier. On vérifie immédiatement qu'en fait elle est aussi continue pour  $x$  entier:

on a  $F(1) = \frac{q-1}{2} + q h\left(\frac{1}{q}\right)$ , ce qui est égal à 0 car, comme  $g(x) = 0$

pour  $x$  entier, la formule (3) donne  $h\left(\frac{1}{q}\right) = g\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{q-1}{2q}$ ; or on voit

que, quand  $x$  tend vers 1 par valeurs inférieures,  $F(x)$  tend vers  $h(1) = 0$ .

Nous compléterons notre résultat en montrant que la fonction  $F$  n'est dérivable en aucun point et déterminant explicitement sa série de Fourier. Celle-ci est absolument convergente et ses coefficients s'expriment à l'aide des valeurs de la fonction  $\zeta$  de Riemann aux points  $\frac{2k\pi i}{\log q}$ , où  $k \in \mathbf{Z}^*$ .<sup>7)</sup>

## 2. DÉMONSTRATION DE LA FORMULE (1)

Soient  $a_0(n), a_1(n), a_2(n), \dots$  les chiffres de l'entier positif ou nul  $n$  écrit en base  $q$ , lus de droite à gauche. En fait il y a seulement un nombre fini de chiffres, mais on peut former une suite infinie en complétant par des zéros.

Ainsi on a 
$$n = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(n) q^r,$$

avec  $0 \leq a_r(n) < q$  pour tout  $r \geq 0$  et  $a_r(n) = 0$  pour  $r > \frac{\log n}{\log q}$ .

On a aussi 
$$S_q(n) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r(n).$$

<sup>7)</sup> La possibilité de déterminer explicitement la série de Fourier de  $F$  nous a été signalée par M. Mauclaire. Il l'obtenait à partir du résultat suivant, qu'il avait établi antérieurement:

On a pour  $\text{Re } s > 0$ : 
$$s \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{s+1}} S_q([t]) dt = \frac{q^s - q}{q^s - 1} \zeta(s).$$

Nous donnerons ici un calcul direct.

2.1. Remarquons d'abord que l'on a pour chaque  $r \geq 0$

$$(5) \quad a_r(n) = \left[ \frac{n}{q^r} \right] - q \left[ \frac{n}{q^{r+1}} \right].$$

Cela résulte immédiatement de ce que l'on a pour chaque  $k \geq 0$

$$\left[ \frac{n}{q^k} \right] = \sum_{j=k}^{\infty} a_j(n) q^{j-k}.$$

Ceci est évidemment vrai pour  $k = 0$ . Pour  $k \geq 1$  on peut écrire

$$\frac{n}{q^k} = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(n) q^{j-k} + \sum_{j=k}^{\infty} a_j(n) q^{j-k},$$

et on voit que la première somme au second membre est  $\geq 0$  et  $< 1$ , tandis que la deuxième est un entier.

Comme, pour  $n \leq t < n + 1$ ,

$$\left[ \frac{t}{q^r} \right] = \left[ \frac{n}{q^r} \right] \text{ et } \left[ \frac{t}{q^{r+1}} \right] = \left[ \frac{n}{q^{r+1}} \right],$$

on peut écrire (5) sous la forme

$$(6) \quad a_r(n) = \int_n^{n+1} \left( \left[ \frac{t}{q^r} \right] - q \left[ \frac{t}{q^{r+1}} \right] \right) dt.$$

2.2. Ceci dit, soit  $m$  un entier  $\geq 1$ , et posons  $l = \frac{\log m}{\log q}$ .

On voit d'abord que, si  $n < m$ , on a  $a_r(n) = 0$  pour  $r > [l]$ .

Ainsi on a pour chaque  $n < m$

$$S_q(n) = \sum_{r=0}^{[l]} a_r(n).$$

Il en résulte que l'on a

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[l]} \left( \sum_{n=0}^{m-1} a_r(n) \right).$$

Mais la formule (6) donne

$$\sum_{n=0}^{m-1} a_r(n) = \int_0^m \left( \left[ \frac{t}{q^r} \right] - q \left[ \frac{t}{q^{r+1}} \right] \right) dt$$

$$= \int_0^m \left( \left[ \frac{t}{q^r} \right] - q \left[ \frac{t}{q^{r+1}} \right] - \frac{q-1}{2} \right) dt + m \frac{q-1}{2}.$$

En faisant le changement de variable  $t = q^{r+1} u$ , on voit que

$$\sum_{n=0}^{m-1} a_r(n) = q^{r+1} g(q^{-r-1}m) + m \frac{q-1}{2}.$$

En reportant cette valeur dans (7) on obtient

$$\sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1}m) + (1 + [l]) m \frac{q-1}{2}$$

ou

$$(8) \quad \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1}m) + (1 + [l]) \frac{q-1}{2}.$$

En posant  $r = [l] - k$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1}m) &= \sum_{k=0}^{[l]} q^{1+[l]-k} g(mq^{k-[l]-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} q^{1+[l]-k} g(mq^{k-[l]-1}), \end{aligned}$$

puisque, pour  $k > [l]$ ,  $m q^{k-[l]-1}$  est un entier et  $g(mq^{k-[l]-1}) = 0$ .

En tenant compte de ce que  $m = q^l$ , ceci donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{[l]} q^{r+1} g(q^{-r-1}m) &= q^{1+[l]-l} \sum_{k=0}^{\infty} q^{-k} g(q^k \cdot q^{l-[l]-1}) \\ &= q^{1+[l]-l} h(q^{l-[l]-1}). \end{aligned}$$

Ainsi (8) donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_q(n) &= \frac{q-1}{2} l + \frac{q-1}{2} (1 + [l] - l) + q^{1+[l]-l} h(q^{l-[l]-1}) \\ &= \frac{q-1}{2} l - F(l), \end{aligned}$$

ce qui est le résultat désiré.

2.3. *Remarque* : On peut montrer que l'on a pour tout  $x$  réel  $\geq 1$

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) = \frac{q-1}{2 \log q} x \log x + x F \left( \frac{\log x}{\log q} \right) - h(x) + (1 + [x] - x) S_q([x]),$$

formule qui donne (1) en prenant  $x = m$ .

En posant  $\lambda = \frac{\log x}{\log q}$ , on a

$$\sum_{n \leq x} S_q(n) = \sum_{r=0}^{[\lambda]} \left( \sum_{n \leq x} a_r(n) \right).$$

On déduit de (6) que l'on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} a_r(n) &= \int_0^x \left( \left[ \frac{t}{q^r} \right] - q \left[ \frac{t}{q^{r+1}} \right] \right) dt + (1 + [x] - x) a_r([x]), \\ &= q^{r+1} g(q^{-r-1}x) + \frac{q-1}{2} x + (1 + [x] - x) a_r([x]), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} S_q(n) &= \\ &= \sum_{r=0}^{[\lambda]} q^{r+1} g(q^{-r-1}x) + \frac{q-1}{2} x (1 + [\lambda]) + (1 + [x] - x) S_q([x]), \end{aligned}$$

puis on vérifie que

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{[\lambda]} q^{r+1} g(q^{-r-1}x) &= q^{1+[\lambda]} \sum_{k=0}^{[\lambda]} q^{-k} g(q^k \cdot q^{\lambda-[\lambda]-1}) \\ &= x q^{1+[\lambda]-\lambda} h(q^{\lambda-[\lambda]-1}) - h(x). \end{aligned}$$

### 3. DÉMONSTRATION DE LA NON DÉRIVABILITÉ DE LA FONCTION $F$

Nous allons maintenant montrer que la fonction  $F$  n'est dérivable en aucun point. En raison de la périodicité, il suffit de montrer qu'elle n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert  $]0, 1[$  et qu'elle n'est pas dérivable à gauche au point 1.

3.1. On voit que ceci se ramène à montrer que la fonction  $h$  n'est dérivable en aucun point de l'intervalle ouvert  $\left] \frac{1}{q}, 1 \right[$  et n'est pas dérivable à gauche au point 1.

En effet, si  $\frac{1}{q} \leq t < 1$ , on a  $0 \leq 1 + \frac{\log t}{\log q} < 1$  et (4) donne