

1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

CHANGES OF SIGN OF $\pi(x) - \text{li } x$

by Harold G. DIAMOND¹

1. INTRODUCTION

The prime number theorem asserts that $\pi(x)$, the number of primes not exceeding x , is asymptotic to

$$\text{li } x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^x \right) \frac{du}{\log u}$$

as $x \rightarrow \infty$. It has been shown [12, p. 72] that $\pi(x) < \text{li } x$ for $3/2 \leq x \leq 10^8$, and it was once conjectured that this inequality prevailed for all $x \geq 3/2$. However, this conjecture was disproved by Littlewood [11] who established

THEOREM 1. $\pi(x) - \text{li } x$ changes sign infinitely often as $x \rightarrow \infty$.

Littlewood's proof was simplified by Ingham [5]. In the present article we make a further simplification by eliminating use of the so called explicit formula for ψ (cf. [4], pp. 76-80). The deepest fact which we require from analytic number theory is an estimate of the size of $N(T)$, the number of zeros ρ of the Riemann zeta function satisfying $0 < \text{Im } \rho \leq T$.

The key step in the argument is Theorem 2, which is given in the next section. This result, which is based on another article of Ingham [6], enables us to relate a certain average of the function π to zeros of the Riemann zeta function.

2. A TAUBERIAN THEOREM

We begin by giving an extension of the Wiener-Ikehara tauberian theorem. Our result admits poles and certain "lesser" singularities on the abscissa of convergence of the transformed function. We adhere to the curious convention of expressing the complex variable s as $\sigma + it$.

¹) Research supported in part by a grant from the National Science Foundation.