SUR LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par Bernard MALGRANGE

INTRODUCTION

Le présent article reprend, à quelques modifications près, une série d'exposés faits au séminaire Goulaouic-Schwartz en mars 1972. Le début est consacré à l'étude de l'indice analytique et de l'indice formel d'un opérateur différentiel, et à leur comparaison; les résultats sont très élémentaires, et il est d'autant plus surprenant que, à la connaissance de l'auteur, ils ne figurent pas dans la littérature classique consacrée aux équations différentielles. Signalons à ce propos que le théorème de l'indice analytique a été démontré indépendamment par H. Komatsu [1]. La fin de l'article a davantage un caractère d'exposition: il s'agit, au fond de reprendre les résultats sur les développements asymptotiques de Turritin, tels qu'ils sont exposés dans Wasow [1], en utilisant l'importante simplification apportée par N. Katz [1] dans ce genre de questions. Pour rendre l'exposé plus « original », nous avons préféré travailler avec les germes de fonctions C^∞, plutôt qu'avec les développements asymptotiques de fonctions holomorphes dans des angles assez petits, comme le font Turritin et Wasow à la suite d'autres auteurs. La transposition de la méthode suivie ici à ce dernier cas se fait sans difficulté, et nous nous contenterons de l'esquisser à la fin du paragraphe 10.

§ 1. — COMPARAISON SÉRIES FORMELLES — SÉRIES CONVERGENTES (cf. Malgrange [1])

On pose $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{x\}$, les séries convergentes d'une variable = les germes de fonction holomorphe en $0 \in \mathbf{C}$; $\hat{\mathcal{O}} = \mathbf{C}[[x]]$ les séries formelles à une variable; enfin K et $\hat{K}$ désignent respectivement le corps des fractions de $\mathcal{O}$ et celui de $\hat{\mathcal{O}}$ (en particulier, K est le corps des germes en 0 de fonctions méromorphes). Pour $f \in \hat{K}$, on peut écrire $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_p x^p$, $f_p \in \mathbf{C}$, les f_p étant nuls pour $p < p_0$; on note $v(f)$ le plus grand p_0 possédant cette propriété.

Considérons un opérateur différentiel $D = \sum_0^m a_p \frac{d^p}{dx^p}$, avec $a_p \in \mathcal{O}$ $(0 \leq p \leq m)$, et $a_m \neq 0$. On a d'abord le résultat suivant

Proposition 1.1. L'application $D: \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ est à indice; son indice noté $\chi(D, \mathcal{O})$ est égal à $m - v(a_m)$.

Rappelons qu'une application linéaire $u: E \to F$ (E, F, espaces vectoriels sur $\mathbf{C}$) est dite « à indice » si son noyau et son conoyau sont de dimension finie; l'indice de u, qu'on notera $\chi(u)$ (ou $\chi(u, E, F)$ ou toute autre notation analogue) est par définition le nombre dim ker u − dim coker u.

Démonstration. Soit $\Delta_r \subset \mathbf{C}$ $(r > 0)$ le disque fermé: $|x| \leqslant r$. Pour p entier $\geqslant 0$, on note $B^p(\Delta_r)$ l'espace des fonctions sur Δ_r à valeurs complexes, de classe $\mathscr{C}^p$, et holomorphes sur $\mathring{\Delta}_r$; c'est un sous-espace fermé de $\mathscr{C}^p(\Delta_r)$, ce dernier espace étant muni d'une quelconque des normes équivalentes usuelles.

Choisissons r assez petit pour que les a_p soient holomorphes au voisinage de Δ_r, et pour que a_m ne s'annule pas dans $\Delta_r - \{0\}$.

Lemme 1.2. L'application $D: B^m(\Delta_r) \to B^0(\Delta_r)$ est à indice, et son indice est égal à $m - v(a_m)$.

En effet, écrivons $D = a_m \frac{d^m}{dx^m} + D'$; comme D' est de degré $\leqslant m - 1$, le théorème d'Ascoli montre que l'application $D': B^m(\Delta_r) \to B^0(\Delta_r)$ est compacte. D'après les théorèmes connus de perturbation des opérateurs à indice, il suffit donc d'établir le résultat pour D remplacé par $a_m \frac{d^m}{dx^m}$ cela se fait immédiatement en factorisant cette dernière application par

$$B^m(\Delta_r) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} B^{m-1}(\Delta_r) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \cdots \xrightarrow{\frac{d}{dx}} B^0(\Delta_r) \xrightarrow{a_m} B^0(\Delta_r)$$

et en utilisant l'additivité de l'indice par composition.

La proposition se déduit aussitôt du lemme précédent, en utilisant le fait que $\mathcal{O}$ est la limite inductive des $B^p(\Delta_r)$, pour $r \to 0$.

Passons maintenant au cas des séries formelles.

Proposition 1.3. L'application $D : \hat{\mathcal{O}} \to \hat{\mathcal{O}}$ *est à indice, et l'on a*

$$\chi(D, \hat{\mathcal{O}}) = \sup[p - v(a_p)] .$$

Posons en effet $n = \sup[p - v(a_p)]$; on a $v(a_p) \geqslant p - n$, avec égalité pour certaines valeurs de p, disons $p \in P$: pour tout p, on a $a_p = x^{p-n} b_p$, avec $b_p \in \mathcal{O}$, et $b_p(0) \neq 0$ pour $p \in P$.

Soit k un entier $\geqslant n$; on a

$$a_p \frac{d^p}{d x^p} x^k = k(k-1) \dots (k-p+1) b_p(0) x^{k-n} + (\text{termes d'ordre} > k-n)$$

d'où $D x^k = \sum\limits_{p \in P} k(k-1) \dots (k-p+1) b_p(0) x^{k-n} + (\text{termes d'ordre} > k-n)$; pour k assez grand, disons $k \geqslant k_0$ le coefficient de x^{k-n} dans l'expression précédente est $\neq 0$, puisque c'est un polynôme en k dont le terme dominant $b_q(0) k^q$ $(q = \sup P)$ est non nul.

On déduit de là, par un calcul de récurrence sur les coefficients que pour $k \geqslant k_0$ et $g \subset \hat{\mathcal{O}}$ donné, avec $v(g) \geqslant k - n$, il existe un unique $f \in \hat{\mathcal{O}}$ vérifiant $v(f) \geqslant k$, $Df = g$; autrement dit, en désignant par $\hat{\mathfrak{m}}$ l'idéal maximal de $\hat{\mathcal{O}}$, on a un isomorphisme

$$D : \hat{\mathfrak{m}}^k \xrightarrow{\sim} \hat{\mathfrak{m}}^{k-n} \quad (k \geqslant k_0) .$$

La proposition résulte immédiatement de là, par exemple par un argument de suite exacte.

Considérons maintenant la suite exacte $0 \to \mathcal{O} \to \hat{\mathcal{O}} \to \hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}} \to 0$. En appliquant D à chacun des 3 facteurs, on trouve une suite exacte de complexes; d'où une suite exacte de cohomologie.

$$0 \to \ker(D, \mathcal{O}) \to \ker(D, \hat{\mathcal{O}}) \to \ker D, \hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}}) \to \operatorname{coker}(D, \mathcal{O}) \to$$
$$\operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}}) \to \operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}}) \to 0$$

Le troisième et le sixième terme de cette suite exacte donnent donc les obstructions pour que les flèches $\ker(D, \mathcal{O}) \to \ker(D, \hat{\mathcal{O}})$ et $\operatorname{coker}(D, \mathcal{O}) \to \operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}})$ soient des isomorphismes. Le théorème de comparaison est alors le suivant

Théorème 1.4. On a 1) $\operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}}) = 0$,

2) $\dim \ker(D, \hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}}) = \sup[p - v(a_p)] - m + v(a_m)$.

L'assertion 1) signifie que, pour tout $f \in \hat{\mathcal{O}}$, il existe $g \in \hat{\mathcal{O}}$ et $h \in \mathcal{O}$ avec $f = Dg + h$; or, la démonstration de la proposition 1.3 montre qu'il suffit de prendre un h tel qu'on ait $v(f-h) \geqslant k_0 - n$; par exemple il suffit de prendre pour h la somme des termes de degré $< k_0 - n$ de f.

L'assertion 2) résulte alors immédiatement des propositions 1.1 et 1.3; d'où le théorème.

Pour qu'on ait $\ker(D, \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) = 0$, et par conséquent, pour que les flèches $\ker(D, \mathcal{O}) \to \ker(D, \hat{\mathcal{O}})$ et $\operatorname{coker}(D, \mathcal{O}) \to \operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}})$ soient toutes deux bijectives, il faut et il suffit qu'on ait $m - v(a_m) = \sup[p - v(a_p)]$, autrement dit qu'on ait, pour tout p, $v(a_p) \geqslant v(a_m) + p - m$. Or c'est précisément la définition classique des points singuliers réguliers. Cela nous conduit à la définition suivante

Définition 1.5. On appelle « irrégularité de D (en 0)» *le nombre* $i(D) = \sup[p - v(a_p)] - [m - v(a_m)]$.

Un exemple classique (Euler) de point singulier irrégulier est le suivant: on prend $Df = x^2 \dfrac{df}{dx} - f$; posant $f_0 = \sum_{n \geq 0} n!\, x^{n+1}$, on a $Df = x$; on a ici $i(D) = 1$, donc la classe de f_0 modulo $\mathcal{O}$ est une base de $\ker(D, \hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$.

Remarque 1.6. La proposition 1.1. montre en particulier qu'on a $\dim \ker(D, \mathcal{O}) \geqslant m - v(a_m)$, ce qui est un théorème classique de Perron.

Remarque 1.7. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, et soit $D = \sum_0^m a_p \dfrac{d^p}{dx^p}$ un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathcal{H}(\Omega)$, l'espace des fonctions holomorphes dans Ω. Supposons qu'on ait $b^1 = \dim H^1(\Omega, \mathbf{C}) < +\infty$ et que le nombre $v(a_m, \Omega)$ des zéros de a_m dans Ω (compté chacun avec son ordre) soit fini. On a alors le résultat suivant: l'application $D : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{H}(\Omega)$ est à indice, et l'on a $\chi(D, \mathcal{H}(\Omega)(= m(1 - b^1) - v(a_m, \Omega)$.

Cela peut se voir par exemple d'une manière analogue à la proposition 1.1 en approchant Ω par une suite convenable de compacts K_i à bord régulier et en étudiant l'application $D : B^m(K_i) \to B^0(K_i)$.

On peut aussi opérer ainsi: soit Z l'ensemble des zéros de a_m, et posons $\Omega^* = \Omega - Z$; sur Ω^*, la suite de faisceaux

$$0 \to \ker(D, \mathcal{H}) \to \mathcal{H} \xrightarrow{D} \mathcal{H} \to 0$$

est exacte et ker $(D, \mathscr{H})$ est localement isomorphe à $\mathbf{C}^m$ (théorème d'existence et d'unicité usuel); par suite l'application $D : \mathscr{H}\ (\Omega^*) \to \mathscr{H}\ (\Omega^*)$ a pour indice $m(1-b_*^1)$, $b_*^1 = \dim H^1(\Omega^*, \mathbf{C})$.

D'autre part, pour chaque $a \in Z$, soit Δ_a un disque ouvert centré en a, avec $\Delta_a \in \Omega$, $\Delta_a \cap \Delta_b = \phi$ si $a \neq b$. Comme $H^1(\Omega, \mathscr{H}) = 0$, on a

$$\mathscr{H}\ (\Omega^*) / \mathscr{H}\ (\Omega) \simeq \bigoplus_{a \in \Delta_a} \mathscr{H}\ (\Delta_a^*) / \mathscr{H}\ (\Delta_a), \text{ avec } \Delta_a^* = \Delta_a - \{a\}.$$

On a $\chi(D, \mathscr{H}\ (\Delta_a^*)) = 0$ par le raisonnement précédent, et $\chi(D, \mathscr{H}\ (\Delta_a)) = m - v(a_m, a)$ (par passage à la limite projective, à partir de 1.2.) On conclut alors en utilisant la suite exacte

$$0 \to \mathscr{H}\ (\Omega) \to \mathscr{H}\ (\Omega^*) \to \mathscr{H}\ (\Omega^*) / \mathscr{H}\ (\Omega) \to 0.$$

§ 2. — Autres théorèmes de comparaison

Nous reprenons les hypothèses de la proposition 1.1.

Théorème 2.1.

a) *L'application* $D : K \to K$ *est à indice et l'on a* $\chi(D, K) = -i(D)$.

b) *L'application* $D : \hat{K} \to \hat{K}$ *est à indice, et l'on a* $\chi(D, \hat{K}) = 0$.

c) *On a* coker $(D, \hat{K}/K) = 0$ *et* dim ker $(D, \hat{K}/K) = i(D)$.

L'assertion c) résulte de 1.4 et de l'isomorphisme naturel $\hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}} \tilde{\to} \hat{K}/_K$. Les assertions a) et b) vont résulter du lemme suivant:

Lemme 2.2. L'application $D : K/_{\mathcal{O}} \to K/_{\mathcal{O}}$ *a pour indice* $-\sup[p - v(a_p)]$.

Désignons en effet par K_{-p} l'ensemble des éléments f de K, avec $v(f) \geqslant -p$; un calcul analogue à celui de la proposition 1.3 fait avec les puissances négatives de x montre qu'on a, avec $n = \sup[p - v(a_p)]$: $DK_{-p} \subset K_{-p-n}$, et que, pour p assez grand, l'application $D : K/K_{-p} \to K/K_{-p-n}$ est un isomorphisme. Le lemme en résulte immédiatement. L'assertion a) résulte alors de 1.1 et 2.2 en utilisant la suite exacte $0 \to \mathcal{O} \to K \to K/_{\mathcal{O}} \to 0$; l'assertion b) résulte de manière analogue de 1.3 et 2.2, et de l'isomorphisme $K/_{\mathcal{O}} \tilde{\to} \hat{K}/_{\hat{\mathcal{O}}}$.

Soit S_n l'espace des fonctions holomorphes dans la couronne $0 < |x| < r$, et $S = \bigcup_{r > 0} S_r$. On a le résultat suivant (cf. Deligne [1], prop. II.6.20).