§ 3. Remarques

§ 3. Remarques

1. La fonction $L(s, \kappa)$ est essentiellement la fonction zêta globale de la courbe elliptique

$$y^2 = 4x^3 + 1$$

sur le corps $E = Q(\rho)$. On observe simplement que si N_p = nombre de points dans la courbe réduite

$$u^3 \equiv v(v+1) \pmod{p},$$

on a

$$N_p = p + 1 + \frac{\tau_p^3}{p} + \frac{\bar{\tau}_p^3}{p} \quad \text{pour} \quad p \equiv 1 \pmod{3}.$$

Pour plus de détails, voir Weil [19], [20] et aussi Moreno [16].

2. La méthode utilisée ici nous permet de donner une solution partielle au problème suivant de Hilbert [9] (§ 112 pp. 227) qui est une généralisation de celui de Kummer. Soient m un nombre premier et p un autre nombre premier de la forme $p = 1 + tm$. Soit χ un caractère mutliplicatif de $(Z/pZ)^*$ d'ordre m et définissons la somme de Gauss par

$$\tau_p = \sum_{k=1}^{p-1} \chi(k)\, e^{\frac{2\pi i k}{m}}.$$

Alors on a $\tau_p = p^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_p}$. Dans notre mémoire [16] nous démontrerons que les angles à la m – ie puissance $\tau_p^m = p^{\frac{m}{2}} e^{im\theta_p}$ sont équirépartis dans l'intervalle $(0, \pi)$ pour la mesure de Lebesgue.

3. Notre théorème donne une solution du problème de Davenport [3] (§ 3 p. 27).

4. L'équirépartition des angles $3\theta_p$ donne des résultats partiels pour le problème de Chowla [2] (problème 48, p. 94) qui demande d'obtenir la meilleure constante pour laquelle l'inégalité

$$\left| \sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^3}{p}} \right| \leq 2p^{\frac{1}{2}}, \quad p \equiv 1 \pmod{3}$$

reste valable. Nos résultats prouvent que pour chaque $\varepsilon > 0$ il a y une infinité de nombres premiers tels que

$$\left| \sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^3}{p}} \right| \geqq (1-\varepsilon)\, p^{\frac{1}{2}} .$$

On doit observer simplement que

$$\sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^3}{p}} = \tau_p + \bar{\tau}_p = 2\, p^{\frac{1}{2}} \cos \theta_p .$$

Cette idée remonte à Hasse [7] (§ 10.8, p. 171) qui l'avait déjà employée dans le cas de la somme de Gauss

$$\sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^4}{p}}, \quad p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4) .$$

5. La solution complète du problème de Kummer sera immédiate si on peut établir que les deux fonctions zêta définies par le produit d'Euler

$$L_v(s) = \prod_{\substack{p \\ p \equiv 1\ (mod\ 3)}} (1+\tau_p^v\, p^{-s})^{-1} (1+\bar{\tau}_p^v\, p^{-s})^{-1}, \quad v = 1, 2$$

sont des fonctions holomorphes pour $Re(s) \geqq \frac{3}{2} - \varepsilon$ et $Re(s) \geqq 2 - \varepsilon$ resp. et ne s'annulent pas sur la droite de convergence absolue. Il serait aussi très intéressant de donner une interprétation de caractère 1-adique d'un élément de Frobenius d'expression $\tau_p + \bar{\tau}_p$.

Kubota [10], [11] a obtenu des résultats très profonds pour des fonctions analogues à $L_1(s)$ et $L_2(s)$ et nous espérons que sa méthode pourrait s'appliquer à notre problème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CASSELS, J. N. S. On kummer sums. *Proc. London Math. Soc.* (3) *21* (1970), 19-27.

[2] CHOWLA, S. *The Riemann Hypothesis and Hilbert's Tenth Problem.* Gordon and Bleach, New York, 1965.

[3] DAVENPORT, H. *Multiplicative number Theory.* Markham, Chicago, 1967.

[4] —— und H. HASSE. Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen im gewissen zyklischen Fällen. *J. reine angew. Math, 172* (1935), 151-182.

[5] DEURING, M. Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve von Geschlechte Eins. I, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen,* (1953),85-94.

[6] GOLDSTINE, H. and J. von NEUMANN. A numerical study of a conjecture of Kummer. *Math. Tables Aids Comput. 7* (1953), 133-134.

[7] HASSE, H. *Vorlesungen über Zahlentheorie.* 1te Aufgabe, Springer, Berlin, 1964.

[8] HECKE, E. Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. I, II, *Math. Zeitschr., 1* (1918), 357-376; *6* (1920), 11-51.

[9] HILBERT, D. Die Theorie der algebraischen Zalkörper. *Jahresbericht D. Math. Ver. Bd. 4* (1897), 175-546.