

## § 3. Remarques

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

§ 3. REMARQUES

1. La fonction  $L(s, \kappa)$  est essentiellement la fonction zêta globale de la courbe elliptique

$$y^2 = 4x^3 + 1$$

sur le corps  $E = \mathbb{Q}(\rho)$ . On observe simplement que si  $N_p =$  nombre de points dans la courbe réduite

$$u^3 \equiv v(v+1) \pmod{p},$$

on a

$$N_p = p + 1 + \frac{\tau_p^3}{p} + \frac{\bar{\tau}_p^3}{p} \quad \text{pour } p \equiv 1 \pmod{3}.$$

Pour plus de détails, voir Weil [19], [20] et aussi Moreno [16].

2. La méthode utilisée ici nous permet de donner une solution partielle au problème suivant de Hilbert [9] (§ 112 pp. 227) qui est une généralisation de celui de Kummer. Soient  $m$  un nombre premier et  $p$  un autre nombre premier de la forme  $p = 1 + tm$ . Soit  $\chi$  un caractère multiplicatif de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  d'ordre  $m$  et définissons la somme de Gauss par

$$\tau_p = \sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) e^{\frac{2\pi i k}{m}}.$$

Alors on a  $\tau_p = p^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_p}$ . Dans notre mémoire [16] nous démontrerons que les angles à la  $m$ -<sup>ie</sup> puissance  $\tau_p^m = p^{\frac{m}{2}} e^{im\theta_p}$  sont équirépartis dans l'intervalle  $(0, \pi)$  pour la mesure de Lebesgue.

3. Notre théorème donne une solution du problème de Davenport [3] (§ 3 p. 27).

4. L'équirépartition des angles  $3\theta_p$  donne des résultats partiels pour le problème de Chowla [2] (problème 48, p. 94) qui demande d'obtenir la meilleure constante pour laquelle l'inégalité

$$\left| \sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^3}{p}} \right| \leq 2 p^{\frac{1}{2}}, \quad p \equiv 1 \pmod{3}$$

reste valable. Nos résultats prouvent que pour chaque  $\varepsilon > 0$  il a y une infinité de nombres premiers tels que

$$\left| \sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^3}{p}} \right| \geq (1-\varepsilon) p^{\frac{1}{2}}.$$

On doit observer simplement que

$$\sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^3}{p}} = \tau_p + \bar{\tau}_p = 2 p^{\frac{1}{2}} \cos \theta_p.$$

Cette idée remonte à Hasse [7] (§ 10.8, p. 171) qui l'avait déjà employée dans le cas de la somme de Gauss

$$\sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^4}{p}}, \quad p \equiv 1 \pmod{4}.$$

5. La solution complète du problème de Kummer sera immédiate si on peut établir que les deux fonctions zêta définies par le produit d'Euler

$$L_v(s) = \prod_{p \equiv 1 \pmod{3}} (1 + \tau_p^v p^{-s})^{-1} (1 + \bar{\tau}_p^v p^{-s})^{-1}, \quad v = 1, 2$$

sont des fonctions holomorphes pour  $Re(s) \geq \frac{3}{2} - \varepsilon$  et  $Re(s) \geq 2 - \varepsilon$  resp. et ne s'annulent pas sur la droite de convergence absolue. Il serait aussi très intéressant de donner une interprétation de caractère 1-adique d'un élément de Frobenius d'expression  $\tau_p + \bar{\tau}_p$ .

Kubota [10], [11] a obtenu des résultats très profonds pour des fonctions analogues à  $L_1(s)$  et  $L_2(s)$  et nous espérons que sa méthode pourrait s'appliquer à notre problème.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CASSELS, J. N. S. On kummer sums. *Proc. London Math. Soc.* (3) 21 (1970), 19-27.
- [2] CHOWLA, S. *The Riemann Hypothesis and Hilbert's Tenth Problem*. Gordon and Bleach, New York, 1965.
- [3] DAVENPORT, H. *Multiplicative number Theory*. Markham, Chicago, 1967.
- [4] ——— und H. HASSE. Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen im gewissen zyklischen Fällen. *J. reine angew. Math.*, 172 (1935), 151-182.
- [5] DEURING, M. Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve von Geschlechte Eins. I, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, (1953), 85-94.
- [6] GOLDSTINE, H. and J. von NEUMANN. A numerical study of a conjecture of Kummer. *Math. Tables Aids Comput.* 7 (1953), 133-134.
- [7] HASSE, H. *Vorlesungen über Zahlentheorie*. 1te Aufgabe, Springer, Berlin, 1964.
- [8] HECKE, E. Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. I, II, *Math. Zeitschr.*, 1 (1918), 357-376; 6 (1920), 11-51.
- [9] HILBERT, D. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. *Jahresbericht D. Math. Ver.* Bd. 4 (1897), 175-546.