2.1. Un problème de contrôle dans les coefficients

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

2. Problèmes d'existence

2.1. *Un problème de contrôle dans les coefficients*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, de frontière Γ régulière. L'ensemble des contrôles est défini par [1]:

$$(2.1) \qquad \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^\infty(\Omega),\ 0 < m \leqslant v(x) \leqslant M < \infty \text{ p.p. dans } \Omega\}$$

($\mathcal{U}_{ad}$ = ensemble des contrôles *ad*missibles).

Pour $v \in \mathcal{U}_{ad}$, *l'état* $y(v)$ *du système* est défini par la solution du problème elliptique:

$$(2.2) \qquad \left| \begin{aligned} & -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\, v(x) \frac{\partial y}{\partial x_j}\right) = f \ \textit{dans}\ \Omega, \\ & y = 0 \ \textit{sur}\ \Gamma, \end{aligned} \right.$$

où f est donné par exemple dans $L^2(\Omega)$ et où les a_{ij} sont donnés avec:

$$(2.3) \qquad a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,\ \alpha > 0.$$

Le problème (2.2) admet une solution unique:

$$(2.4) \qquad y(v) \in H_0^1(\Omega)\ ^{2)}.$$

La *fonction coût* est par exemple:

$$(2.5) \qquad J(v) = \left(\int_\Omega |y(v) - z_d|^2\, dx\right)^{1/2},$$

où z_d (état *d*ésiré) est donné dans $L^2(\Omega)$. Le problème est alors *de minimiser* $J(v)$ *lorsque* v *parcourt* $\mathcal{U}_{ad}$.

Pour des exemples physiques où ce problème intervient, Cf. K. A. Lure [1]; on ignore s'il existe $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que $J(u) = \inf. J(v)$, $v \in \mathcal{U}_{ad}$. On va voir, suivant Murat [1] que la réponse est *négative* pour un problème très voisin du précédent.

---

1) *Toutes* les fonctions utilisées sont à *valeurs réelles.*

2) $H^1(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev (Cf. Sobolev [1]) des fonctions $\varphi \in L^2(\Omega)$ telles que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$ et $H_0^1(\Omega)$ le sous espace des $\varphi \in H^1(\Omega)$ tels que $\varphi = 0$ sur Γ.