7. Classification des fibrés en droites

7. Classification des fibrés en droites

Soient x et y deux points non séparés de X. On peut trouver dans X un voisinage ouvert V de $\{x, y\}$ et un homéomorphisme, croissant ou décroissant (cf. exemple 3.2), de V sur le branchement simple Z.

Dans l'arbre $\hat{X}$ associé à X ce voisinage V correspond à un sous-arbre $\hat{V}$ ayant l'un des deux aspects suivants:

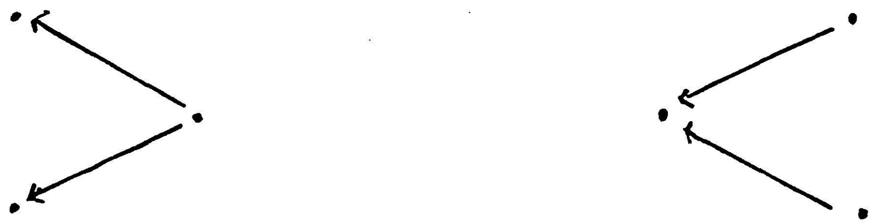

Fig. 4

Par conséquent (proposition 2.1):

7.1 *Proposition. Soit η un fibré en droites sur X. A tout couple ordonné (α, β) d'arêtes de $\hat{X}$ ayant même origine ou même extrémité on peut associer un nombre $[\alpha, \beta] = \pm 1$ de facon que $[\beta, \alpha] = - [\alpha, \beta]$.*

7.2 *Définition. Une assignation sur l'arbre $\hat{X}$ est une correspondance $\mathscr{A}$ associant à tout couple ordonné (α, β) d'arêtes de $\hat{X}$ ayant même origine ou même extrémité un nombre $\mathscr{A}(\alpha, \beta) = \pm 1$ de façon que $\mathscr{A}(\beta, \alpha) = - \mathscr{A}(\alpha, \beta)$.*

On dit alors que l'assignation de la proposition 7.1 est l'*assignation associée au fibré η*.

Si $\mathscr{A}$ est une assignation sur $\hat{X}$, et si $\hat{f}$ est un automorphisme de $\hat{X}$, on désigne par $-\mathscr{A}$ l'assignation $(\alpha, \beta) \to -\mathscr{A}(\alpha, \beta)$, et par $\hat{f}\mathscr{A}$ l'assignation $(\alpha, \beta) \to \mathscr{A}(\hat{f}^{-1}\alpha, \hat{f}^{-1}\beta)$.

Soient η et η' deux fibrés en droites sur X, et soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ les assignations correspondantes sur $\hat{X}$. On a alors (théorème 2.3):

7.3 THÉORÈME. *Si η et η' sont équivalents pour le groupe G^+ (resp. pour le groupe G) on a $\mathscr{A}' = \mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{A}' = \pm \mathscr{A}$). Si η et η' sont isomorphes pour le groupe G^+ (resp. pour le groupe G) il existe un automorphisme $\hat{f}$ de $\hat{X}$ tel que $\mathscr{A}' = \hat{f}\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{A}' = \pm \hat{f}\mathscr{A}$).*

De plus si X est simple ces conditions sont aussi suffisantes.

Inversement si $\mathscr{A}$ est une assignation sur $\hat{X}$ il existe un fibré en droites η sur X ayant $\mathscr{A}$ pour assignation (on construit η par récurrence en commençant par ôter un sommet extrémal de $\hat{X}$).

Soient $\mathscr{A}'$ une seconde assignation sur $\hat{X}$ et η' le fibré en droites sur X correspondant à $\mathscr{A}'$. Si $\hat{f}$ est un automorphisme de $\hat{X}$ tel que $\mathscr{A}' = \hat{f}\mathscr{A}$ il existe un isomorphisme (F, f) de η sur η' tel que $\hat{f}$ soit l'automorphisme de $\hat{X}$ correspondant à l'homéomorphisme f.

Par conséquent:

7.4 THÉORÈME. *Soit X une variété topologique de dimension 1 à base dénombrable, simplement connexe, ayant un nombre fini de points de branchement tous simples. La classification des fibrés en droites sur X est équivalente à la classification des assignations sur l'arbre $\hat{X}$ associé à X.*

7.5 *Exemple.* Dans le cas où X est la variété de l'exemple iii) de 6.4 il existe

a) en ce qui concerne les fibrés sur X:

4 classes d'équivalence pour le groupe G^+;

2 classes d'équivalence pour le groupe G;

3 classes d'isomorphisme pour le groupe G^+;

2 classes d'isomorphisme pour le groupe G;

b) en ce qui concerne les feuilletages du plan orienté ayant X pour espace des feuilles (cf. § 5):

2 classes de conjugaison pour les feuilletages non orientés;

5 classes de conjugaison orientée pour les feuilletages non orientés;

5 classes de conjugaison pour les feuilletages orientés;

6 classes de conjugaison orientée pour les feuilletages orientés.