Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 18 (1972)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THÉORIE ADDITIVE DES NOMBRES PROBLÈME DE WARING ET THÉORÈME DE HILBERT

Autor: Dress, François

Kapitel: 1. Introduction historique

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45368

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

THÉORIE ADDITIVE DES NOMBRES PROBLÈME DE WARING ET THÉORÈME DE HILBERT [1]

par François DRESS

1. INTRODUCTION HISTORIQUE

Depuis Pythagore, de très nombreux mathématiciens se sont intéréssés aux propriétés « magiques » des nombres entiers, en particulier des nombres triangulaires, des nombres carrés, des nombres m-gonaux (les triangulaires sont les entiers de la forme $n(n+1)/2$: nombre des éléments d'un triangle de points de base n, par exemple, les nombres carrés sont les carrés: nombre d'éléments d'un carré de points, etc...).

C'est Bachet qui semble avoir remarqué le premier, en 1621, que tout entier positif pouvait s'écrire comme somme de 4 carrés (certains étant éventuellement nuls), encore qu'il y ait quelques raisons de penser que Diophante connaissait déjà ce résultat empirique. Ensuite Fermat a noté, en 1636, que tout entier positif pouvait s'écrire comme somme de 3 nombres triangulaires, de 4 carrés, de m nombres m-gonaux (on s'apercevra plus tard que ce résultat général n'est pas le meilleur possible).

Ainsi, pour les nombres triangulaires:

$$\begin{aligned}
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
12 &= 10+1+1 = 6+6+0 = 6+3+3\\
13 &= 10+3+0 = 6+6+1\\
14 &= 10+3+1\\
15 &= 15+0+0 = 6+6+3\\
16 &= 15+1+0 = 10+6+0 = 10+3+3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

et pour les carrés:

$$\begin{aligned}
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
12 &= 9+1+1+1 = 4+4+4+0\\
13 &= 9+4+0+0 = 4+4+4+1
\end{aligned}$$

[1]) Cet article reprend et complète une partie de la conférence qu'a prononcée F. DRESS aux Journées Arithmétiques de 1971 (24 au 29 mai 1971, à Marseille).

$$14 = 9 + 4 + 1 + 0$$
$$15 = 9 + 4 + 1 + 1$$
$$16 = 16 + 0 + 0 + 0 = 4 + 4 + 4 + 4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Fermat avait ajouté, dans la lettre à Mersenne où il indiquait cette découverte, qu'il n'avait pas la place d'en donner la démonstration, mais qu'il y consacrerait un livre entier. Le livre ne fut jamais publié... On peut d'ailleurs douter que Fermat ait été en possession d'une démonstration correcte car des efforts infructueux furent déployés pendant plus d'un siècle, par Euler en particulier, pour tenter de résoudre ce problème. C'est finalement Lagrange, en 1770, qui en donna la première démonstration.

En même temps d'autres théorèmes empiriques, de nature additive également, étaient énoncés. Les deux plus célèbres sont le problème de Goldbach, formulé en 1742 dans une lettre à Euler: tout entier pair est-il somme de 2 nombres premiers ? et le problème de Waring, formulé en 1770 dans un livre (avec addition du « etc... » dans l'édition de 1782!): tout entier positif est-il somme de 9 cubes, de 19 bicarrés, etc... ?

On verra que ces questions sont, malgré la simplicité de leur énoncé, extrêmement ardues et que l'intervalle qui sépare l'énoncé empirique de sa démonstration se compte en dizaines d'années ou plus souvent en siècles (phénomène assez courant en arithmétique!).

2. Notions fondamentales en théorie additive des nombres

En donnant le premier résultat partiel intéressant dans le problème de Goldbach, Schnirelman esquissa, en 1930, un cadre général pour tous les problèmes additifs relatifs à des suites d'entiers.

Etant donné 2 suites croissantes d'entiers strictement positifs $A = \{a_1 < a_2 < \ldots\}$ et $B = \{b_1 < b_2 \ldots\}$, on appelle somme de A et B et on note $A + B$ la suite croissante obtenue en réordonnant l'ensemble $A \cup B \cup \{a_i + b_j \mid a_i \in A, b_j \in B\}$ (on convient parfois que $a_0 = 0 \in A$, $b_0 = 0 \in B$, auquel cas on considère simplement l'ensemble $\{a_i + b_j\}$).

On peut en particulier effectuer les sommes $A + A = 2A$, $A + A + A = 3A, \ldots, A + \ldots + A = hA, \ldots$ On dit alors que la suite A est une base (d'ordre $\leqslant h$) des entiers s'il existe h tel que $hA = \mathbf{N}$ (A est exactement d'ordre h si $(h-1)\,A \subsetneqq \mathbf{N}$). On peut également définir la notion de base relativement à une sous-suite de $\mathbf{N}$ (les entiers pairs dans le problème de Goldbach, par exemple).