

# I. Discriminant et ramification.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot K = \bigcup_{\alpha \in I} K_{\alpha}. \\ \cdot \text{Si } \alpha \text{ et } \beta \text{ appartiennent à } I, \text{ le corps composé } K_{\alpha} \cdot K_{\beta} \text{ appartient} \\ \text{à l'ensemble } \{K_{\gamma}\}_{\gamma \in I}. \end{array} \right.$$

Il existe toujours au moins un sous-ensemble  $I$ ,  $\mathcal{F}$  lui-même. Lorsque  $D$  est dénombrable, nous pouvons prendre  $\mathbb{N}$  comme sous-ensemble  $I$ :

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

les corps  $K_n$  étant emboîtés.

Soit  $L$  une extension finie séparable de  $K$ . Si  $\theta$  est un générateur de  $L/K$ , posons  $L_{\alpha} = K_{\alpha}(\theta)$ . Nous ne considérerons par la suite que les indices  $\alpha$  pour lesquels  $[L_{\alpha} : K_{\alpha}] = [L : K] = n$ .

Enfin les anneaux d'entiers de  $K$ ,  $L$ ,  $K_{\alpha}$  et  $L_{\alpha}$  seront notés respectivement  $A$ ,  $B$ ,  $A_{\alpha}$  et  $B_{\alpha}$ .

## I. DISCRIMINANT ET RAMIFICATION.

### 1. Discriminant.

*Définition 1.*

Nous appellerons discriminant de l'extension  $L/K$  l'idéal  $\Delta$  de  $A$  engendré par les discriminants des bases de  $L/K$  à éléments dans  $B$ .

Puisque  $L/K$  est séparable,  $\Delta$  est un idéal entier non nul de  $A$ .

*Proposition 1.*

Soit  $I$  un sous-ensemble de  $\mathcal{F}$  possédant la propriété (1). Notons  $\Delta$  le discriminant de  $L/K$ , et  $\Delta_{\alpha}$  celui de  $L_{\alpha}/K_{\alpha}$ . Alors

$$\Delta = \bigcup_{\alpha \in I} \Delta_{\alpha}.$$

En effet, un élément de  $\Delta$  est combinaison linéaire finie, à coefficients dans  $A$ , de discriminants de bases de  $L/K$  à éléments dans  $B$ : c'est donc un élément d'un  $\Delta_{\alpha}$ .

Inversement, puisque  $[L_{\alpha} : K_{\alpha}] = [L : K]$ , toute base de  $L_{\alpha}/K_{\alpha}$  à coefficients dans  $B_{\alpha}$  est une base de  $L/K$  à coefficients dans  $B$ , et  $\Delta$  contient  $\bigcup_{\alpha \in I} \Delta_{\alpha}$ .

## 2. Ramification.

Remarquons que dans l'anneau  $A$ , tout idéal premier  $\mathcal{P}$  est maximal. Le localisé  $A_{\mathcal{P}}$  est un anneau de valuation, donc, à  $\mathcal{P}$ , on peut associer une valuation  $v$  sur  $K$ , de groupe des valeurs  $\Gamma_v$ . Comme l'extension  $L/K$  est finie, il n'existe dans  $B$  qu'un nombre fini d'idéaux premiers au-dessus de  $\mathcal{P}$ ,  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_l$  (cf. Bourbaki [3] § 8). A chaque  $\mathfrak{p}_i$  est associée une valuation  $v_i$  de  $L$  qui prolonge  $v$ ; le groupe  $\Gamma_{v_i}$  des valeurs de  $v_i$  admet  $\Gamma$  comme sous-groupe.

### Définition 2.

Soit  $\mathcal{P}$  un idéal premier de  $A$ . Nous dirons que  $\mathcal{P}$  se ramifie dans l'extension  $L/K$  si l'un des indices  $e_i = (\Gamma_{v_i} : \Gamma_v)$  est strictement supérieur à 1.

Remarque: si  $f_i = [B/\mathfrak{p}_i : A/\mathcal{P}]$ , l'inégalité  $\sum_{i=1}^l e_i f_i \leq n$  est encore vraie. (cf. Bourbaki [3]).

### Proposition 2.

Pour qu'un idéal premier  $\mathcal{P}$  de  $A$  se ramifie dans l'extension  $L/K$ , il faut et il suffit qu'il contienne l'idéal discriminant  $\Delta$ .

La démonstration de cette proposition repose sur le principe bien connu de la propagation de la non-ramification vers le haut. On peut énoncer ce principe de la manière suivante:

soient  $k$  le corps des quotients d'un anneau de Dedekind,  $M$  et  $N$  deux extensions algébriques finies séparables de  $k$ , linéairement disjointes sur  $k$ . Si  $\mathcal{P}$  est un idéal premier de  $k$  non ramifié dans l'extension  $M/k$ , tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $N$  qui divise  $\mathcal{P}$  est non ramifié dans l'extension  $M \cdot N/N$ .

Posons  $\mathcal{P}_{\alpha} = \mathcal{P} \cap A_{\alpha}$ , et notons  $v^{\alpha}$  (resp  $v_i^{\alpha}$ ) la restriction de  $v$  (resp  $v_i$ ) à  $K_{\alpha}$  (resp  $L_{\alpha}$ ).

Supposons  $\mathcal{P}$  ramifié dans  $L/K$ : il existe un indice  $i \in [1, l]$  tel que  $(\Gamma_{v_i} : \Gamma_v) > 1$ . On ne peut trouver  $\alpha_0 \in I$  tel que  $(\Gamma_{v_i^{\alpha_0}} : \Gamma_{v^{\alpha_0}}) = 1$ ; sinon, la « propagation de la non-ramification vers le haut », et l'égalité  $K = \bigcup_{\substack{\beta \in I \\ \beta \geq \alpha_0}} K_{\beta}$

permettraient de conclure que  $(\Gamma_{v_i} : \Gamma_v) = 1$ . Donc pour tout  $\alpha \in I$ ,  $\mathcal{P}_{\alpha}$  est ramifié dans  $L_{\alpha}/K_{\alpha}$ :  $\mathcal{P}_{\alpha}$  contient le discriminant  $\Delta_{\alpha}$  de  $L_{\alpha}/K_{\alpha}$ , et  $\mathcal{P}$  contient  $\Delta = \bigcup \Delta_{\alpha}$ .

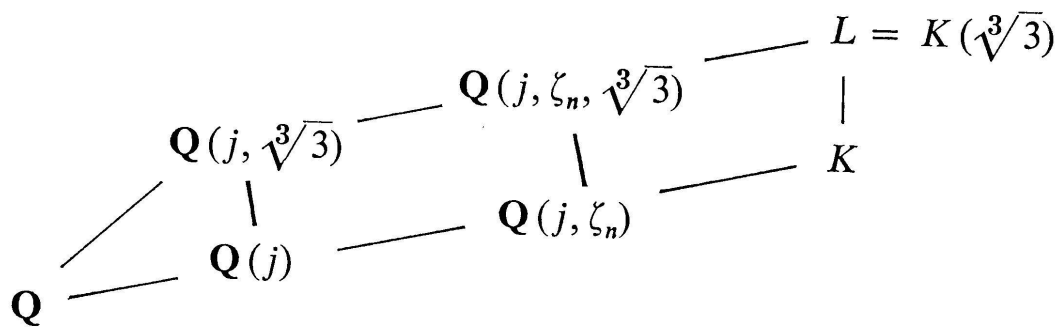
Inversement, si  $\mathcal{P}$  contient  $\Delta$ , pour tout  $\alpha \in I$ , on a les inclusions:

$$\mathcal{P}_\alpha \supset \Delta \cap A_\alpha \supset \Delta_\alpha.$$

Donc  $\mathcal{P}_\alpha$  se ramifie dans  $L_\alpha/K_\alpha$ . Par « propagation de la non-ramification vers le haut », il existe au moins un indice  $i$  tel que pour tout  $\alpha$ ,  $(\Gamma_{v_i, \alpha} : \Gamma_{v, \alpha}) > 1$ . Pour cette valeur de  $i$ ,  $(\Gamma_{v_i} : \Gamma_v) > 1$ , et  $\mathcal{P}$  est ramifié dans  $L/K$ .

## II. BASES ENTIÈRES.

### 1. Exemple



Soit  $K$  le corps obtenu en adjoignant à  $\mathbf{Q}$ ,  $j$  et toutes les racines  $5^n$ -ièmes de l'unité; soit  $\zeta_n$  une racine primitive  $5^n$ -ième de l'unité. Le corps  $K$ , extension cyclotomique de  $\mathbf{Q}$ , est une extension abélienne de  $\mathbf{Q}$ . Mais  $\mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3})/\mathbf{Q}$  n'est pas abélienne; donc  $L = K(\sqrt[3]{3})$  est une extension de degré 3 de  $K$ .

Les extensions  $\mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3}, \zeta_n)/\mathbf{Q}(j, \zeta_n)$  sont des extensions de Kummer. Les seuls idéaux qui peuvent se ramifier sont ceux qui divisent 3. La théorie de Kummer (cf. Hecke [6]) permet de calculer leur participation au discriminant de  $L_n/K_n$ ; on obtient:  $\Delta_n = 3^4 A_n$ . Mais comme  $Z[j]$  est principal,  $\mathbf{Q}(j, \sqrt[3]{3})/\mathbf{Q}(j)$  admet une base entière,  $\{\lambda, \mu, \nu\}$ , de discriminant  $3^4$ . Donc  $L/K$  admet  $\{\lambda, \mu, \nu\}$  comme base entière.

### 2. Caractérisation des $A$ -modules $B$ de type fini.

*Proposition 3.*

*A et B étant définis au paragraphe précédent, les propositions suivantes sont équivalentes :*

*a — B est un A-module de type fini.*