

# Chapitre XIV

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1971)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

pour qu'une série de fonctions intégrables au sens de Riemann ait une somme intégrable; cela ne veut d'ailleurs pas dire que ces séries soient intégrables terme à terme.

Sur l'intégration terme à terme, M. Osgood et ses élèves ont publié d'intéressants mémoires. Une série peut être convergente de bien des manières; si l'on ne sait pas encore caractériser nettement le degré de convergence et la nature de la convergence d'une série, les questions sont nombreuses où il apparaît qu'une classification des types de convergence est nécessaire. Le point de départ de M. Osgood est une distinction, déjà faite par Seidel, entre deux espèces de points de convergence. Une série étant supposée convergente partout il y a des points autour desquels la convergence est uniforme <sup>1)</sup>, d'autres autour desquels cela n'a pas lieu. M. Osgood distingue deux espèces de ces points de non-uniforme convergence; autour des premiers les restes de la série sont bornés, autour des seconds, que l'on appelle les points  $X$ , cela n'est pas. On devine bien que les points  $X$  vont être les plus gênants et en effet, M. Osgood a fait voir que ces points s'opposaient seuls à l'intégration terme à terme; d'une façon précise il a prouvé que si une série de fonctions continues a une forme continue dans un intervalle libre de points  $X$  on peut l'intégrer dans cet intervalle.

Les élèves de M. Osgood publient de nombreuses généralisations en divers sens de cet important résultat. La théorie des fonctions sommables fournit à la fois une démonstration très simple et une généralisation étendue du théorème de M. Osgood: une série convergente de fonctions sommables, pourvu que la somme soit bornée, représente une fonction sommable et si l'ensemble des restes de la série est borné, cette série est intégrable terme à terme.

#### CHAPITRE XIV

C'est à l'occasion de séries trigonométriques que furent posés les plus importants des problèmes de la théorie générale des fonctions; pour cette raison ces séries, si importantes d'ailleurs dans plusieurs parties des mathématiques, ont dans cette théorie une place à part que n'ont pas les autres développements spéciaux.

---

<sup>1)</sup> D'après R. Baire, si une suite de fonctions continues est convergente, elle converge uniformément en tout point d'un ensemble partout dense, qui est d'ailleurs un *résiduel* au sens de M. Denjoy.

En 1748, dans un mémoire sur le mouvement de Saturne et de Jupiter qui obtint le prix de l'Institut, Euler remarqua que pour calculer l'intégrale d'une série procédant suivant les puissances de  $\cos x$ , il y avait vraisemblablement avantage à la transformer d'abord en série procédant suivant les cosinus des multiples entiers de  $x$  parce que l'intégration, transformant  $\cos n x$  en  $\frac{\sin n x}{n}$ , la présence du dénominateur  $n$  devait augmenter la convergence.

C'est ainsi qu'Euler fut conduit avant la discussion sur les cordes vibrantes, à s'occuper du calcul des coefficients du développement en série trigonométrique d'une fonction donnée. Dès 1748, Euler résolut le problème de diverses manières; comme il s'agissait de calculs effectifs, Euler préféra à la formule de détermination aujourd'hui classique qu'il connaissait peut-être déjà, quoi qu'il ne l'ait indiquée que dans un mémoire de 1777 <sup>1)</sup>, des formules qui sont en somme ce que deviennent les formules classiques quand on y remplace les valeurs exactes des intégrales qui y figurent par des valeurs approchées.

En 1754, D'Alembert fit connaître pour la détermination du premier coefficient la formule classique qu'il démontre par la méthode classique dans laquelle il ne voit d'ailleurs qu'une curiosité (Recherches sur différents points du système du Monde, tome II, p. 66).

En 1757 Clairaut démontra la formule classique pour le cas général; il déclare d'ailleurs, avec une modestie peut-être excessive, que tout ce qu'il démontre a déjà été obtenu par Euler et D'Alembert. Après avoir retrouvé la formule d'Euler, que quelques lignes plus loin il déclarera avec raison identique à celle de D'Alembert, il ajoute:

« Un avantage de la formule précédente c'est *l'universalité* de la construction qu'elle donne; elle est telle, qu'on peut l'appliquer à des fonctions de  $t$  beaucoup plus compliquées que celles que l'on a traitées jusqu'à présent. Dans les cas où la loi de la fonction ne sera pas même donnée algébriquement dans ceux où la courbe qui l'exprime ne serait donnée que par plusieurs points, notre manière de résoudre la série s'appliquerait avec autant de facilité.<sup>2)</sup> »

---

<sup>1)</sup> Voir deux mémoires parus en 1798, dans le tome XI des Nova acta acad. scient. Petrop.; Euler y reprend et y développe pour le cas général les méthodes qu'il avait appliquées en 1748 à la détermination des deux premiers coefficients seuls utiles pour lui, du développement en séries de fonctions particulières.

<sup>2)</sup> Par « loi algébrique » Clairaut entend évidemment ici ce que l'on appelle plus communément « loi analytique ». Le mémoire de Clairaut se trouve dans l'Histoire de l'Académie des Sciences, année 1754, parue seulement en 1759.

Clairaut exprime très clairement ce qu'il faut entendre par ces intégrales qui figurent de la formule classique et qui ne portent peut-être pas sur des fonctions à loi algébrique; une telle intégrale exprime une certaine aire qu'on peut calculer d'une manière approchée.

En 1807 Fourier retrouve la formule qui donne les coefficients puis, faisant le même paralogisme que Clairaut, il admet que le développement est possible dans tous les cas où cette formule concerne un sens et, comme Clairaut, il dit ce que signifient les intégrales de la formule. Fourier va d'ailleurs plus loin que Clairaut; il étend le développement à des fonctions discontinues et surtout il donne des exemples de développements<sup>1)</sup>. La phrase citée plus haut semble montrer que si Clairaut, moins absorbé par ses recherches astronomiques, s'était mêlé à la discussion sur les cordes vibrantes, il aurait émis sur la possibilité de développer une fonction en série trigonométrique une opinion différente de celles de Euler et de D'Alembert et voisine de celle de Fourier (Théorie de la chaleur, art. 230). Il est vraisemblable qu'au cours d'une telle discussion Clairaut eût donné, ce qui lui aurait été facile, des exemples de *l'universalité* du développement trigonométrique. En tous cas, il est bien remarquable qu'Euler et D'Alembert n'aient pas commis la faute si heureuse de Clairaut et de Fourier et qu'ils n'aient pas cru pouvoir tirer argument au cours de la discussion sur les cordes vibrantes de la formule de détermination des coefficients qu'ils connaissaient.

---

<sup>1)</sup> Dans un essai historique sur les séries trigonométriques, d'ailleurs très intéressant, M. Arnold Sachse écrit: « Il n'est pas moins certain que Fourier a connu les résultats d'Euler, car il indique lui-même (théorie de la chaleur, art. 428) que l'on trouve chez presque tous les mathématiciens de cette époque, Daniel Bernouilli, Clairaut, Euler, Lagrange, des résultats et des développements analogues aux siens ». En réalité on lit à l'endroit cité: « On trouve dans les ouvrages de tous les géomètres des résultats et des procédés de calcul analogues à ceux que nous avons employés. Ce sont des cas particuliers d'une méthode générale qui n'était point encore formée, ... » et plus loin, parlant de la notion des *fonctions séparées* ou *parties de fonctions*: « cette notion n'est point opposée aux principes généraux du calcul; on pourrait même en trouver les premiers fondements dans les écrits de Daniel Bernouilli, de Clairaut, de Lagrange et d'Euler ». Il y a loin de la phrase de Fourier à la conclusion de M. Sachse. D'ailleurs, tout s'enchaîne si bien dans les déductions de Fourier que l'hypothèse de M. Sachse me paraît à rejeter; même la méthode classique de détermination des coefficients, que seul Fourier pourrait avoir copiée, se présente naturellement (voir par exemple Théorie de la chaleur, art. 278). Il est à noter que Fourier ne considère pas cette méthode comme suffisante, car, dit-il, on pourrait tout aussi bien l'employer en ne conservant que quelques termes dans la série trigonométrique. Ce qui montre bien que les résultats antérieurs, publiés dans des travaux astronomiques, étaient oubliés à l'époque de Fourier, c'est que Poisson, qui chercha à enlever à Fourier l'honneur de sa découverte, ne trouva à citer qu'une formule d'interpolation trigonométrique donnée par Lagrange en 1766, très voisine à la vérité de la formule de Fourier, mais qui ne constituait pas cependant un précédent caractérisé comme ceux d'Euler de D'Alembert et de Clairaut.