14. Existence de plusieurs géodésiques périodiques

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

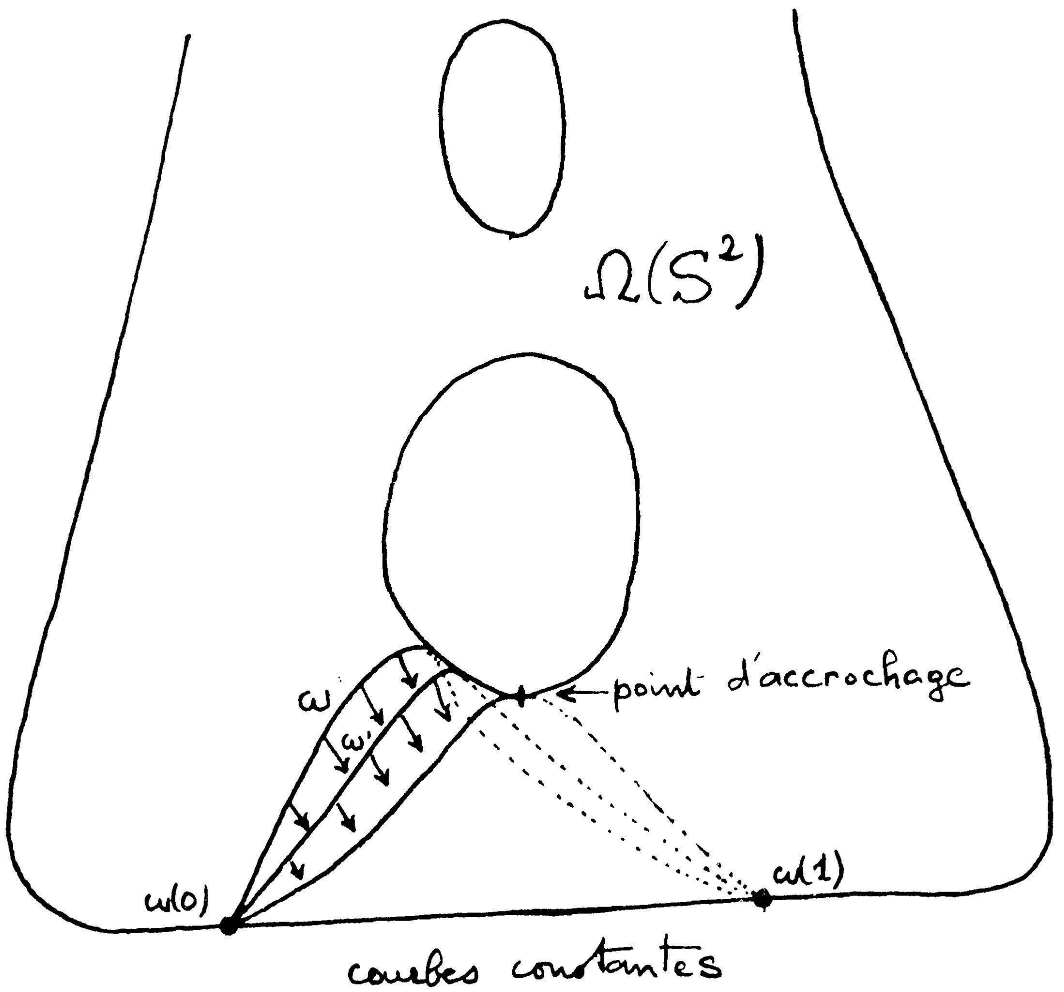
Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

(lacets sans point base) de S^2. Dans $\Omega(S^2)$ on considère le chemin ω, dont l'origine est la courbe constante pôle nord et l'extrémité la courbe constante pôle sud, constitué par les paralléles de S^2. Sur $\Omega(S^2)$ on a la fonction longueur; si ω ne contient aucune géodésique, on peut le déformer continûment en des chemins ω', de même extrémités, déformation dans laquelle chaque courbe diminue strictement en longueur. Continuant ainsi, ou on a trouvé une g.p., ou on a déformé ω en un chemin dont toutes les courbes sont constantes (de longueur nulle). Or cette dernière possibilité est exclue parceque ω est précisément un générateur de $\pi_2(S^2) \neq 0$. C'est donc que notre chemin ω reste « accroché » et le point d'accrochage est précisèment une g.p.



14. *Existence de plusieurs géodésiques périodiques.*

De nombreux auteurs (Lusternik, Schnirelmann, Morse, Fet, Alber, Klingenberg) ont obtenu des résultats partiels d'existence, sur une v.r. compacte donnée, de plusieurs (2, 3, ...) g.p. géométriquement distinctes (des g.p. $c_1, \ldots, c_k$ sont dites *géométriquement distinctes* si les sous-ensembles $c_1(\mathbf{R}), \ldots, c_k(\mathbf{R})$ de M sont distincts). Nous ne donnons pas le détail de leurs résultats; en effet il est actuellement raisonnable de conjecturer que toute v.r. compacte admet une infinité de g.p. géométriquement distinctes.

D'abord, bien sûr, on ne connaît pas de v.r. compacte, de dimension $\geqq 2$, dont on ait pu montrer qu'elle n'a qu'un nombre fini de g.p. géométriquement distinctes. Ensuite d'une part on dispose maintenant du:
(14.1): *théorème* (Gromoll-Meyer, [10]): *soit* $\{b_k(\Omega(M))\}$ *la suite des nombres de Betti de l'espace* $\Omega(M) = C^0(S^1; M)$. *Soit* M *une variété compacte simplement connexe telle que la suite* $\{b_k(\Omega(M))\}$ *n'est pas bornée* (i.e. $\forall\, a \in \mathbf{N}\ \exists\, k$ *tel que* $b_k(\Omega(M)) > a$. *Alors, quelle que soit la* s.r. *sur* M, *la* v.r. (M, g) *admet une infinité de* g.p. *géométriquement distinctes.*

(Noter que les nombres de Betti $b_k(\Omega(M))$ pour une variété M compacte simplement connexe sont tous finis.)

D'autre part, bien que l'on ne sache pas exactement quelles sont les variétés compactes M pour lesquelles la suite $\{b_k(\Omega(M))\}$ n'est pas bornée, on a ceci: (i) plusieurs classes assez larges de M compactes ayant une telle suite non bornée; (ii) les seules variétés simplement connexes connues pour lesquelles cette suite est bornée sont les P_i^n. Or les P_i^n ont, à vrai dire pour leur s.r. canonique g_0, une bonne infinité de g.p. géométriquement distinctes! Remarquer que l'on ne sait pas, même pour des s.r. g voisines de g_0, si (P_i^n, g) admet une infinité de g.p. géométriquement distinctes.

Quant à la démonstration de (14.1), elle est fine et technique. En voici un schéma heuristique, seulement dans le cas « non dégénéré » (le cas dégénéré est cependant essentiel et complique grandement la démonstration). Il faut connaître la théorie de Morse pour les sous-variétés critiques non-dégénérées et pour les variétés de dimension infinie. On procède par l'absurde: s'il n'y a qu'un nombre fini de g.p. géométriquement distinctes, c'est qu'il existe k géodésiques périodiques simples $c_1, \ldots, c_S$, telles que toute g.p. soit un recouvrement fini de l'une d'entre elles. A chaque g.p. on associe un index k; les inégalités de Morse disent que le nombre de g.p. d'index égal à k est supérieur ou égal à $b_k(\Omega(M))$. Etudiant les index $k(m)$ d'une g.p. recouvrant m fois une g.p. donnée, on trouve que $k(m)$ croît, en gros, comme une progression arithmétique. Ceci montre donc que les $b_k(\Omega(M))$ sont bornés. C.Q.F.D.