

10. Géodésiques périodiques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

dans [4], p. 466, le fait que le comportement des géodésiques de (P_8^2, g_0) est exactement le même que celui décrit précédemment pour les géodésiques des (P_i^n, g_0) ($i=1, 2, 4$), en prenant $K = \mathbf{Ca}$ et $i = 8$.

10. Géodésiques périodiques.

(10.1): *définition*: une géodésique $c : [a, b] \rightarrow (M, g)$ est dite périodique (ou fermée) si c est non constante et si $c'(a) = c'(b)$. Elle est dite en outre simple si $c|_{[a,b[}$ est injective.

Le mot périodique est justifié parce que (8.3) montre que c se prolonge en une géodésique $\bar{c} : \mathbf{R} \rightarrow M$ telle que $\bar{c}|_{[a,b]} = c$ et $c(t+b-a) = c(t)$ pour tout t . La figure 1 ne représente pas une géodésique périodique (mais seulement un lacet géodésique), la figure 2 représente une géodésique

périodique non simple, la figure 3 représente une géodésique périodique simple:

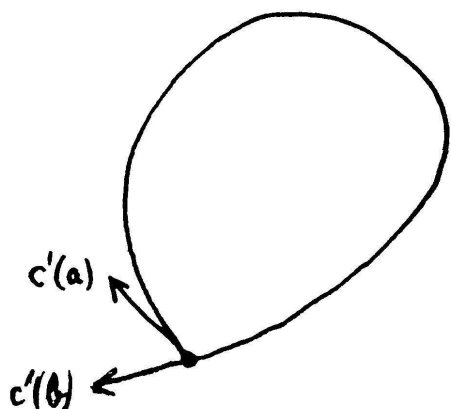


Fig. 1

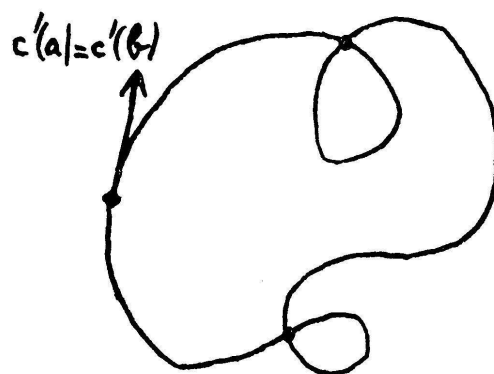


Fig. 2

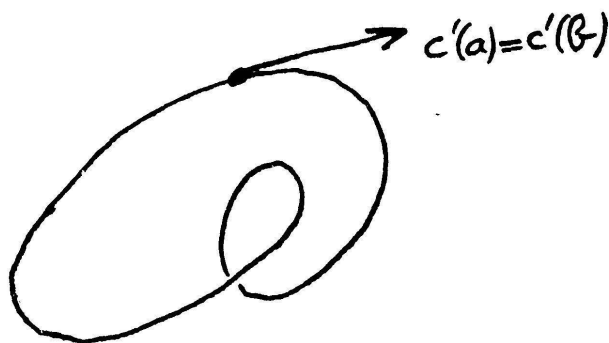


Fig. 3

Pour une v.r. (M, g) on introduit les trois assertions:

(10.2): « GPS (m) »: $\forall x \in T_m M, x \neq 0$, la géodésique c telle que $c'(0) = x$ est périodique, simple et de longueur π ;

(10.3): « GPS »: $\exists m \in M$ tel que « GPS (m) »;

(10.4): « TGPS »: $\forall m \in M$ on a « GPS (m) ».

Exemple: les $(S^n, \frac{1}{2}g_0)$ et les (P_i^n, g_0) ($i=1, 2, 4, 8$) vérifient « TGPS ».

Ce qui précède conduit naturellement à deux types de problèmes:
(i): dans quelle mesure « GPS » ou « TGPS » caractérisent-elles les (P_i^n, g_0) ? (ii): existence d'une ou plusieurs géodésiques périodiques, voire une infinité, sur une v.r.

11. Variétés telles que « GPS ».

On peut seulement espérer au plus que « GPS » caractérisent les variétés différentiables P_i^n . En effet, soit m le pôle nord de S^n et G son groupe d'isotropie, c'est-à-dire $G = \{s \in SO(n+1): s(m) = m\}$ (G est canoniquement isomorphe à $SO(n)$). Alors, pour n'importe quelle s.r. sur S^n qui est invariante par G (i.e. toutes les actions de G sont des isométries), on a « GPS (m) » (laissé au lecteur en exercice: les géodésiques issues de m sont les méridiens). Et, bien sûr, de telles s.r. n'ont aucune raison d'être isométriques à g_0 .

Actuellement, d'une part on ne connaît pas d'autres variétés que les P_i^n à posséder une s.r. telle que « GPS ». D'autre part, on a le résultat suivant, dans lequel $H^*(.; \mathbb{Z})$ représente l'anneau de cohomologie entière: (11.1): *théorème* (Bott: [2], Samelson: [15]): *soit (M, g) telle que « GPS ».* Alors $\exists n$ et $\exists i$ tels que $H^*(M; \mathbb{Z})$ soit isomorphe en tant qu'anneau à $H^*(P_i^n; \mathbb{Z})$.

Il faut remarquer qu'il existe ([6]) des variétés M , non homéomorphes à P_4^2 , mais cependant telles que $H^*(M; \mathbb{Z})$ et $H^*(P_4^2; \mathbb{Z})$ soient isomorphes en tant qu'anneaux. C'est pourquoi il faudrait décider si, oui ou non, il existe sur une de ces M , une s.r. telle que « GPS ».

La démonstration complète de (11.1) est colossale. Le point de départ est la théorie de Morse usuelle. La condition « GPS » assure ceci: il existe une filtration convenable de $\Omega \cdot (M)$, l'espace des lacets à point base de M , par des sous-espaces $\Omega_i(M)$, filtration telle que les nombres de Betti relatifs $b_k(\Omega_{i+1}(M), \Omega_i(M))$ soient tous nuls sauf un précis, qui est en plus égal à un. La suite spectrale de cette filtration permet alors de déterminer exactement $H^*(\Omega \cdot (M); \mathbb{Z})$ (à l'aide d'un seul entier encore inconnu i). De $H^*(\Omega \cdot (M); \mathbb{Z})$ on passe, par la suite spectrale de la fibration de Serre, à $H^*(M; \mathbb{Z})$, dont on montre que c'est un anneau de polynômes tronquée, le générateur est de degré i . Un résultat très profond de topologie algébrique assure que ceci ne peut se produire que pour $i = 0, 1, 2, 4$ et n quelconque ou si $i = 8$ pour $n = 1, 2$ (où $\dim M = ni$). C.Q.F.D.