

4. Le théorème de Pu.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Soit $c : [a, b] \rightarrow M$ une courbe d'une v.r. (M, g) ; même si $c([a, b])$ n'est pas une sous-variété de M on peut définir la longueur de c par :

$$(3.5) \quad \text{long}(c, g) = \int_a^b |c'(t)| dt.$$

Exemple : soit $(M, g) \xrightarrow{P} (N, h)$ une submersion riemannienne; une courbe c de M sera dite *horizontale* si $c'(t) \in H_{c(t)}$ pour tout t . Des définitions (2.5) et (3.5) on déduit :

(3.6): $\text{long}(p \circ c, h) \leq \text{long}(c, g)$; en outre $\text{long}(p \circ c, h) = \text{long}(c, g)$ si et seulement si c est horizontale.

4. Le théorème de Pu.

Avec cette seule notion de volume se posent déjà des problèmes naturels, loin d'être résolus en général. Commençons par un des rares cas où l'on ait un résultat. Soit g une s.r. sur P_1^2 , le plan projectif réel. A (P_1^2, g) on peut attacher deux nombres réels, son volume $\text{vol}(P_1^2, g)$ et son *carcan*, $\text{carc}(P_1^2, g)$, égal à la borne inférieure de la longueur des courbes fermées de P_1^2 non homotopes à zéro :

$$(4.1) \quad \text{carc}(P_1^2, g) = \inf_{c \text{ non } \sim_0} \text{long}(c, g)$$

où il s'agit de l'homotopie des courbes fermées (c'est-à-dire des lacets sans point base). Il est naturel d'espérer que si $\text{carc}(P_1^2, g) \geq k$, alors $\text{surf}(P_1^2, g)$ est supérieur ou égal à un nombre ne dépendant que de k . Définissons le *quotient* de (P_1^2, g) comme le rapport homogène de degré zéro :

$$(4.2) \quad \text{quot}(P_1^2, g) = \frac{\text{surf}(P_1^2, g)}{(\text{carc}(P_1^2, g))^2}.$$

La première chose à faire est de calculer $\text{quot}(P_1^2, g_0)$. Le tableau donne le numérateur; pour $\text{carc}(P_1^2, g_0)$, on utilise le théorème (13.1) et (9.1) (il est bien naturel que les plus petites courbes non homotopes à zéro de (P_1^2, g_0) soient les droites projectives!). Donc $\text{quot}(P_1^2, g_0) = 2/\pi$ (voir tableau). L'interrogation précédente est complètement résolue par le :

(4.3): *théorème* (Pu, [14]). *Quel que soit la s.r. g sur P_1^2 , on a $\text{quot}(P_1^2, g) \geq \text{quot}(P_1^2, g_0)$. En outre, si $\text{quot}(P_1^2, g) = \text{quot}(P_1^2, g_0)$, alors (P_1^2, g) et (P_1^2, g_0) sont isométriques.*

Esquissons la démonstration (voir [14] ou [1], p. 309). On prend le revêtement riemannien (voir (2.4)) (S^2, \tilde{g}) de (P_1^2, g) . D'après le théorème fondamental de la représentation conforme, appliqué à (S^2, g) , il existe

un difféomorphisme $f : S^2 \rightarrow S^2$ tel que $\tilde{f} * \tilde{g} = \tilde{\alpha} \cdot g_0$, où g_0 est la s.r. canonique de S^2 et $\tilde{\alpha}$ une fonction sur S^2 . On peut modifier f de façon à pouvoir passer au quotient et trouver un difféomorphisme f de P_1^2 tel que $f * g = \alpha \cdot g_0$, $\alpha : P_1^2 \rightarrow \mathbf{R}$. Les deux v.r. (P_1^2, g) et $(P_1^2, \alpha \cdot g_0)$ sont isométriques, donc ont même volumes et carcans. On est donc ramené en fait à deux s.r. g_0 et $\alpha \cdot g_0$ sur P_1^2 ; maintenant $SO(3)$ agit sur (P_1^2, g_0) par isométries; on fait la moyenne par cette action et pour la mesure de Haar de $SO(3)$, de la fonction $\alpha^{1/2}$. Ceci donne une fonction $\bar{\alpha}$; la longueur d'une courbe c pour $\bar{\alpha} \cdot g_0$ est la moyenne de la longueur des courbes $\gamma \circ c$ pour $\alpha \cdot g_0$, γ parcourant $SO(3)$; donc $\text{carc}(P_1^2, \bar{\alpha} \cdot g_0) \geq \text{carc}(P_1^2, \alpha \cdot g)$. L'inégalité de Schwarz (pour l'intégrale sur $SO(3)$) dit que $\text{surf}(P_1^2, \bar{\alpha} g_0) \leq \leq \text{surf}(P_1^2, \alpha \cdot g_0)$. Donc $\text{quot}(P_1^2, \bar{\alpha} \cdot g_0) \leq \text{quot}(P_1^2, \alpha \cdot g_0)$. Mais, en fait, $\bar{\alpha}$ est une constante, puisque $SO(3)$ agit transitivement sur P_1^2 ; donc $\text{surf}(P_1^2, \bar{\alpha} \cdot g_0) = \bar{\alpha} \cdot \text{surf}(P_1^2, g_0)$ et $\text{carc}(P_1^2, \bar{\alpha} \cdot g_0) = (\bar{\alpha})^{1/2} \cdot \text{carc}(P_1^2, g_0)$. D'où la première partie du théorème; la seconde se montre en suivant les égalités à la trace dans les inégalités.

Remarques : (i): on peut considérer (4.3) comme une espèce d'inégalité isopérimétrique (isocarcannique!) entre surface et longueur, la longueur de la frontière étant remplacée ici par le carcan pour la variété sans bord P_1^2 ; (ii): (4.3) est une caractérisation plaisante de la s.r. canonique de P_1^2 .

5. Généralisations possibles.

Pour n quelconque, on peut définir $\text{carc}(P_1^n, g)$ exactement par la formule (4.1) et remplacer (4.2) par

$$(5.1) \quad \text{quot}(P_1^n, g) = \frac{\text{vol}(P_1^n, g)}{(\text{carc}(P_1^n, g))^n}.$$

On calcule encore avec (13.1): tableau. Par contre un analogue de (4.3) est complètement ouvert; on ne sait pas si $\text{quot}(P_1^n, g) \geq \text{quot}(P_1^n, g_0)$ pour toute g (pour les variations conformes $\alpha \cdot g_0$, c'est facile, démonstration analogue à celle de (4.3): voir [14]). A fortiori on ne sait pas si l'égalité est caractéristique de g_0 . En fait on ne sait même pas si la borne inférieure $\inf_g \text{quot}(P_1^n, g)$, pour g parcourant toutes les s.r. sur P_1^n , est strictement positive.

En fait on peut encore généraliser toutes ces questions aux P_i^n . Remarquons pour ce faire que, dans P_1^n , dire qu'une courbe c n'est pas homotope à zéro est équivalent à dire qu'elle est homotope à P_1^1 , la droite projective pour l'inclusion héréditaire $P_1^1 \subset P_1^n$. On a aussi des inclusions $P_i^1 \subset P_i^n$ pour tout i . Posons donc: