1. Permutations paires et impaires.

REMARQUES SUR LA SIGNATURE D'UNE PERMUTATION

par P. Cartier (Strasbourg)

Introduction

La théorie des permutations est considérée par la plupart des débutants comme un sujet difficile. On y rencontre en effet des raisonnements d'un type assez différent de ceux auxquels ils ont été habitués dans leurs études antérieures. Il semble pourtant inévitable de l'enseigner dans un cours de première année d'Université, à cause des applications à la théorie des déterminants et à celle des polynômes symétriques.

Cette note est consacrée à un examen des diverses méthodes par lesquelles on peut introduire la signature d'une permutation. Nous avons nous-même expérimenté la plupart de ces méthodes, et discuté à plusieurs reprises de ces questions avec nos collègues J. L. Koszul et P. Gabriel. La comparaison des avantages et inconvénients des diverses méthodes s'appuie donc sur une expérience pédagogique réelle. Du point de vue mathématique, la seule nouveauté est la définition de la signature d'une permutation présentée au n° 4.

1. *Permutations paires et impaires.*

Rappelons les faits connus. Notons n un entier strictement positif et X l'ensemble des entiers $1, 2, \ldots, n$. Une *permutation* (de rang n) est une bijection s de X sur X, c'est-à-dire une application de X dans X telle que tout élément de X soit le transformé d'un élément et d'un seul. Si s et t sont deux permutations, leur produit st est l'application qui à i fait correspondre $s(t(i))$. La permutation identique ε associe chaque élément de X à lui-même. Enfin, si s est une permutation, la permutation inverse s^{-1} est telle que l'on ait $s^{-1}(i) = j$ si et seulement si $s(j) = i$. Avec cette définition du produit, de l'unité et de l'inverse, les permutations forment un groupe S_n.

Nous supposons connue la définition de la *transposition* s_{ij} échangeant i et j, et le fait que toute permutation est produit de transpositions; en fait, nous utiliserons plusieurs fois le fait que toute permutation est produit d'une suite finie de transpositions de la forme $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$ avec $\pi_i = s_{i,i+1}$.

Appelons permutation *paire* toute permutation qui est produit d'un nombre pair de transpositions, et notons S_n^+ leur ensemble; définissons de manière analogue l'ensemble S_n^- des permutations impaires. Ces définitions entraînent immédiatement les propriétés suivantes:

a) On a $S_n = S_n^+ \cup S_n^-$; autrement dit, toute permutation est paire ou impaire.

b) Il existe des permutations paires, par exemple ε, et des permutations impaires, par exemple les transpositions.

c) « Règle des signes »: le produit de deux permutations de même parité est pair, le produit de deux permutations de parité distincte est impair. De plus, toute permutation a même parité que son inverse.

A priori, rien n'exclut qu'une permutation puisse être à la fois paire et impaire. Examinons les deux possibilités:

A) Il n'existe aucune permutation à la fois paire et impaire. Alors les ensembles non vides S_n^+ et S_n^- forment une *partition* de S_n. On peut définir la *signature* d'une permutation s comme le nombre $sgn\ s$ égal à 1 si s est paire et à -1 si s est impaire. La règle des signes se traduit alors en formule:

$$sgn\ st = (sgn\ s) \cdot (sgn\ t)\,, \tag{1}$$

et par définition, on a

$$sgn\ s_{ij} = -1\,. \tag{2}$$

B) Il existe une permutation qui est à la fois paire et impaire. Si a est une telle permutation, la règle des signes montre que a^{-1} est impaire, donc que $\varepsilon = aa^{-1}$ est impaire. Une nouvelle application de la règle des signes montre que pour toute permutation s paire (impaire), alors $s = \varepsilon s$ est impaire (paire). Autrement dit, toute permutation est paire et impaire, et l'on a $S_n^+ = S_n^- = S_n$.

De manière plus succincte, on peut dire ceci: le groupe S_n est engendré par les transpositions, qui sont des éléments d'ordre 2; l'ensemble S_n^+ des permutations paires est le sous-groupe de S_n engendré par les produits de deux transpositions, et S_n^- est de la forme $S_n^+ t$; on a donc $S_n = S_n^+ \cup S_n^+ t$, et par suite, ou bien S_n^+ est d'indice 2 dans S_n et S_n^- est la classe modulo S_n^+ qui ne contient pas ε, ou bien S_n^+ est d'indice 1 dans S_n, auquel cas on a $S_n = S_n^+ = S_n^-$.