§ 10. Conceming the polynomials Q_j.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1970)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

§ 10. *Concerning the polynomials* Q_j.

There is no difficulty in making fairly explicit the construction of t.p.s Q_j of the type employed in 7.6.

For $p > 0$, $t \geqq 0$ define

$$h_p(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t \leqq p, \\ 2\left(1 - \dfrac{t}{2p}\right) & \text{if } p \leqq t \leqq 2p, \\ 0 & \text{if } t \geqq 2p. \end{cases} \tag{10.1}$$

For all complex z define

$$f_p(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z = 0, \\ |z|^{-1}\, \bar{z}\, h_p(|z|) & \text{if } z \neq 0. \end{cases} \tag{10.2}$$

Write

$$\left.\begin{aligned} E_n(z) &= \pi^{-1}\, n \exp(-n|z|^2, \\ P_{n,k}(z) &= \pi^{-1}\, n \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} (n|z|^2)^j \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

Let μ denote Lebesgue measure on C (identified with R^2 in the canonical fashion).

It is then routine to verify that

$$\left.\begin{aligned} &\| E_n * f_p \|_\infty \leqq \| f_p \|_\infty = 1, \\ &\lim_{n \to \infty} E_n * f_p = f_p \end{aligned}\right\} \tag{10.4}$$

uniformly on any compact set omitting 0. From this it follows that to every $p > 0$ and every positive integer ν correspond positive integers $\bar{n}(p, \nu)$, $\bar{k}(p, \nu)$ such that

$$\left.\begin{aligned} &\left| |z|^{-1}\, \bar{z} - f_p * P_{\bar{n}, \bar{k}}(z) \right| \leqq \frac{1}{\nu} \text{ for } \frac{1}{\nu} \leqq |z| \leqq p, \\ &\left| f_p * P_{\bar{n}, \bar{k}}(z) \right| \leqq 1 + \frac{1}{\nu} \text{ for } |z| \leqq p. \end{aligned}\right\} \tag{10.5}$$

Now

$$f_p * P_{\bar{n}, \bar{k}}(z) = q_{p,\nu}(z, \bar{z}), \tag{10.6}$$

where

$$q_{p,\nu}(X, Y) = \pi^{-1}\,\bar{n}(p, \nu) \sum_{j=0}^{\bar{k}(p,\nu)} \frac{(-\bar{n}(p, \nu))^j}{j!} \sum_{l=0}^{j} \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{l} \binom{j}{m} X^l\, Y^m$$
$$(-1)^{l+m} \int \zeta^{j-l} \bar{\zeta}^{j-m} f_p(\zeta)\, d\mu(\zeta)$$

$$= \sum_{l,m=0}^{\bar{k}(p,\nu)} C_{p,\nu}(l, m)\, X^l\, Y^m. \tag{10.7}$$

It is easily verifiable that the $C_{p,\nu}(l, m)$ are real-valued.

If θ is a bounded measurable function on G and

$$Q^{\circ}_{p,\nu} = q_{p,\nu}(\theta, \bar{\theta}),\ p \geqq \| \theta \|_{\infty}, \tag{10.8}$$

we have from (10.5)

$$\left.\begin{aligned} &\left| |\theta|^{-1}\bar{\theta} - Q^{\circ}_{p,\nu} \right| \leqslant \frac{1}{\nu} \text{ whenever } |\theta| \geqq \frac{1}{\nu}, \\ &|Q^{\circ}_{p,\nu}| \leqq 1 + \frac{1}{\nu} \text{ everywhere on } G. \end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

If θ is a t.p., then $Q^{\circ}_{p,\nu}$ is a t.p. and

$$\mathrm{sp}\,(Q^{\circ}_{p,\nu}) \subseteq [\mathrm{sp}\,(\theta)]. \tag{10.10}$$

From (10.9) we obtain

$$\left| |\theta| - \theta\, Q^{\circ}_{p,\nu} \right| \leqq \begin{cases} \nu^{-1} |\theta| \text{ whenever } |\theta| \geqslant \frac{1}{\nu}, \\ \left(2 + \frac{1}{\nu}\right) |\theta| \text{ everywhere,} \end{cases}$$

whence it follows that, if $\theta \neq 0$,

$$\left| \int_G \theta\, Q^{\circ}_{p,\nu}\, d\lambda G \right| \geqq (1 - \nu^{-1}) \| \theta \|_1 - \nu^{-1}(2 + \nu^{-1})$$
$$\geqq (1 - 2\nu^{-\frac{1}{2}}) \| \theta \|_1 \tag{10.11}$$

provided $\nu \geqq 9 \| \theta \|_1^{-2}$.

Taking $\theta = D_{\Delta_j}$ and $p_j \geqq \| D_{\Delta_j} \|$, the trigonometric polynomials

$$Q'_j = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{-1} Q^{\circ}_{p_j,\nu} = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{-1} q_{p_j,\nu}(D_{\Delta_j}, \bar{D}_{\Delta_j}) \tag{10.12}$$

are then seen from (10.9), (10.10) and (10.11) to satisfy

$$\left.\begin{aligned} \| Q_j' \| &\leqq 1, \\ \mathrm{sp}\,(Q_j') &\subseteq [\Delta_j], \\ \left| \int \nu\, D_{\Delta_j}\, Q_j'\, d\lambda_G \right| &\geqq (1-3\nu^{-\frac{1}{2}}) \| D_{\Delta_j} \|_1 \end{aligned}\right\} \tag{10.13}$$

provided ν is chosen $\geqq 9 \| D_{\Delta_j} \|_1^{-1}$. In view of (7.6), we may choose the integer $\nu \geqq \max_j (36, 9 \| D_{\Delta_j} \|_1^{-1})$. Then (10.13) shows that there are unimodular complex numbers ξ_j such that the $Q_j = \xi_j Q_j'$ satisfy (7.7).

Appendix

Rudin-Shapiro sequences

A.1 Notations and definitions. As hitherto, all topological groups G are assumed to be Hausdorff; and, for any locally compact group G, λ_G will denote a selected left Haar measure, with respect to which the Lebesgue spaces $L^p(G)$ are to be formed. $C_c(G)$ denotes the set of complex-valued continuous functions on G having compact supports.

If X and Y are topological groups, Hom (X, Y) denotes the set of continuous homomorphisms of X into Y.

Suppose henceforth G to be locally compact. As in 5.1, if $k \in C_c(G)$, T_k will denote the convolution operator

$$f \mid\!\!\rightarrow f * k$$

with domain $C_c(G)$ and range in $C_c(G)$; and $\| k \|_{p,q}$ will denote the (p, q)-norm of this operator, i.e., the smallest real number $m \geqq 0$ such that

$$\| f * k \|_q \leqq m \| f \|_p \quad (f \in C_c(G)).$$

It is well-known that, if G is Abelian, $\| k \|_{2,2}$ is equal to

$$\| \hat{k} \|_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} | \hat{k}(\gamma) |,$$

where Γ is the character group of G and $\hat{k}$ is the Fourier transform of k. (Something similar is true whenever G is compact, but we shall not use this.)

U-RS-sequences on G are as defined in 5.4.