2. Préliminaires

$$\frac{1}{x_1 \, x_2 \dots x_q} \sum_{\substack{n_1 \leq x_1 \\ n_2 \leq x_2 \\ \cdots\cdots \\ n_q \leq x_q}} f(n_1, n_2, \dots, n_q) = \tag{2}$$

$$= C x_1^{ia_1} x_2^{ia_2} \dots x_q^{ia_q} L_1(\log x_1) \dots L_q(\log x_q) + o\,[1]$$

Nous démontrerons ce résultat en nous plaçant dans le cas où $q = 2$. Le lecteur verra facilement comment la démonstration doit être modifiée pour traiter le cas où $q > 2$.

Pour simplifier l'écriture, nous remplacerons n_1 et n_2 par m et n et x_1 et x_2 par x et y.

En restant dans le cas où $q = 2$, nous préciserons — comme on peut le faire pour le résultat de Halász — dans quel cas on a chacune des circonstances (a) et (b).

De plus, nous donnerons des théorèmes fournissant des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction f de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à

$$|f(m, n)| \leqslant 1 \text{ quels que soient } m \text{ et } n \in \mathbf{N}^*$$

possède une valeur moyenne non nulle, ou pour que

$$\frac{1}{xy} \sum_{\substack{m \leq x \\ n \leq y}} f(m, n)$$

tende vers une limite lorsque x et y tendent vers $+\infty$ avec un rapport fixe quelconque, cette limite étant indépendante de la valeur du rapport.

Ici encore, le cas où $q = 2$ n'est pas essentiellement différent du cas où $q > 2$.

Enfin, nous indiquerons deux résultats particuliers intéressants.

1.3. Il est entendu une fois pour toutes que, tout au long de cet article, la lettre p représente toujours un nombre premier. Les lettres m, n, d, j, k, r, s représentent des entiers; m, n, d sont toujours des entiers $\geqslant 1$.

Une somme qui ne contient aucun terme est considérée comme nulle, et un produit qui n'a aucun facteur est considéré comme égal à 1.

2. Préliminaires

2.1. Il nous est utile de donner plus de précisions sur les résultats de Halász.

f étant fonction arithmétique multiplicative satisfaisant à

$$|f(n)| \leqslant 1 \quad \text{pour tout } n \geqslant 1,$$

Halász montre d'abord qu'il existe au plus un u réel tel que l'on ait

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, [f(p)\, p^{-iu}]\} < +\infty \text{ [1]} \tag{3}$$

On a ensuite les résultats suivants:

1. S'il n'existe aucun u réel tel que l'on ait (3), f possède une valeur moyenne nulle.

2. Supposons maintenant qu'il existe un u réel tel que l'on ait (3), soit u_0.

Alors,

a. Si $2^{-iru_0} f(2^r) = -1$ pour tout $r \geqslant 1$, f possède une valeur moyenne nulle.

b. Si $2^{-iru_0} f(2^r) \neq -1$ pour au moins un $r \geqslant 1$, on a (1) avec $a = u_0$ et

$$L_1(t) = \exp\left\{ i \sum_{p \leq e^t} \frac{1}{p} Im\, [f(p)\, p^{-iu_0}] \right\}.$$

2.1.1. Ajoutons que, lorsque l'on est dans le cas 2 avec $u_0 = 0$, c'est-à-dire lorsque l'on a

$$\sum \frac{1}{p} \{1 - \Re e\, f(p)\} < +\infty,$$

on a pour x tendant vers $+\infty$

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n) = \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left[1 + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}\right] + o\,[1].$$

Ceci est une conséquence inmédiate d'un théorème que nous avons établi ailleurs [2].

2.2. Il nous est utile aussi de rappeler quelques notions et quelques résultats élémentaires concernant les fonctions de $\mathscr{A}_2$, que nous avons indiqués dans l'article cité au paragraphe 1.1 (et qui se généralisent naturellement à $\mathscr{A}_q$).

2.2.1. Dans $\mathscr{A}_2$ on définit l'opération de convolution de la façon suivante:

$f_* g$ est la fonction h définie par

$$h(m, n) \doteq \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} f(d_1, d_2)\, g\left(\frac{m}{d_1}, \frac{n}{d_2}\right).$$

La convolution est commutative et associative.

---

[1]) Il est clair que, pour chaque p, $1 - \mathrm{Re}\,[f(p)\, p^{-iu}] \geqslant 0$.

2.2.2. f et g étant deux fonctions de $\mathscr{A}_2$ et w_1 et w_2 deux variables complexes, si les séries doubles

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{f(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \quad \text{et} \quad \sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}}$$

sont absolument convergentes pour $\Re e\, w_1 = \alpha$ et $\Re e\, w_2 = \beta$, il en est de même de la série double

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{h(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}}, \quad \text{où} \quad h = f_* g,$$

et on a pour $\Re e\, w_1 = \alpha$ et $\Re e\, w_2 = \beta$

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{h(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \left(\sum_{m,n\geq 1} \frac{f(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \right) \left(\sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}} \right).$$

2.2.3. Toute fonction f de $\mathscr{A}_2$ telle que $f(1, 1) \neq 0$ peut se mettre sous la forme

$$f = g_* h,$$

où $h(m, n) = f(m, 1) f(1, n)$ et g satisfait à

$$g(m, 1) = 0 \quad \text{pour } m > 1 \qquad \text{et} \qquad g(1, n) = 0 \quad \text{pour } n > 1.$$

Si f appartient à $\mathfrak{M}_2$, les fonctions g et h appartiennent aussi à $\mathfrak{M}_2$.

2.3. Indiquons aussi le résultat suivant:

Soit f une fonction de $\mathfrak{M}_2$ satisfaisant à $|f(m, n)| \leqslant 1$ quels que soient m et $n \geqslant 1$.

Supposons que

1° On n'a pas

$$|f(2, 1)| = 1 \text{ et } f(2^r, 1) = (-1)^{r+1} f(2, 1)^r \text{ pour tout } r > 1;$$

2° On n'a pas

$$|f(1, 2)| = 1 \text{ et } f(1, 2^s) = (-1)^{s+1} f(1, 2)^s \text{ pour tout } s > 1.$$

Alors la fonction g considérée au paragraphe 2.2.3 satisfait à

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{|g(m, n)|}{m\, n} < +\infty, \tag{4}$$

de sorte que la série double

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m, n)}{m^{w_1} n^{w_2}}$$

est absolument convergente pour $\Re e\, w_1 = \Re e\, w_2 = 1$.

De plus, on a pour $\Re e\, w_1 = \Re e\, w_2 = 1$

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m,n)}{m^{w_1} n^{w_2}} =$$

$$\prod \left\{ \left[\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1+kw_2}} \right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}, \tag{5}$$

le produit infini étant absolument convergent.

On trouvera dans notre article « On some sets of pairs of positive integers » [1)] (du haut de la page 272 à la fin du paragraphe 3.2.5) la démonstration, sous les mêmes hypothèses, de (4) et de la formule que donne (5) en y prenant $w_1 = w_2 = 1$. On verra immédiatement quelle petite modification de la démonstration permet d'obtenir (5) avec w_1 et w_2 quelconques satisfaisant à $\Re e\, w_1 = \Re e\, w_2 = 1$.

Remarquons que les hypothèses 1° et 2° sont satisfaites en particulier si l'on a

$$f(2^r, 1) = 0 \text{ pour tout } r \geqslant 1 \quad \text{et} \quad f(1, 2^s) = 0 \text{ pour tout } s \geqslant 1.$$

Le facteur correspondant à $p = 2$ dans le produit infini au second membre de (5) est alors égal à 1, et (5) s'écrit

$$\sum_{m,n\geq 1} \frac{g(m,n)}{m^{w_1} n^{w_2}} = \prod_{p>2} \left\{ \left[\sum_{j,k\geq 0} \frac{f(p^j, p^k)}{p^{jw_1+kw_2}} \right] \Big/ \left[\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f(p^j, 1)}{p^{jw_1}} \right] \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(1, p^k)}{p^{kw_2}} \right] \right\}.$$

C'est ce cas particulier que nous utiliserons.

2.4. Nous utiliserons aussi la remarque immédiate suivante:

Soit f une fonction de $\mathfrak{M}_2$ et soient f_1 et f_2 les fonctions de $\mathfrak{M}_2$ déterminées par

$$f_1(p^r, p^s) = \begin{cases} f(p^r, p^s) & \text{si } p > 2, \\ 0 & \text{si } p = 2, \end{cases}$$

et

$$f_2(p^r, p^s) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > 2, \\ f(2^r, 2^s) & \text{si } p = 2, \end{cases}$$

pour r et $s \geqslant 0$ et $r + s > 0$.

Alors on a

$$f = f_1 * f_2.$$

---

1) Journal of Number Theory, 1 (1969), p. 261-279.