

# III. Une mesure singulière et presque lisse

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Soit  $r_n$  une suite positive sommable ( $\sum_1^\infty r_n = b_0 < \infty$ ). Notons  $\varphi_n$  la fonction

paire égale à  $\frac{1}{2r_n}$  sur  $[0, r_n]$ , et nulle sur  $[r_n, \infty]$ . Soit  $f_n$  la convolution

$\varphi_1 * \varphi_2 * \dots * \varphi_n$ . On vérifie que  $f_n$  converge uniformément vers une fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  et de support  $[-b_0, b_0]$  quand  $n \rightarrow \infty$  [4].

Posons  $b_n = r_{n+1} + r_{n+2} + \dots$  et supposons maintenant  $r_n > b_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ). L'ensemble des points  $\sum_1^\infty \varepsilon_n r_n$  ( $\varepsilon_n = \pm 1$ ) est un ensemble parfait

symétrique que nous noterons  $E$ . A une translation près, tout ensemble parfait symétrique est de cette forme, pour un choix convenable de la suite  $r_n$ . Pour construire  $E$ , on peut procéder par étapes: on part du segment  $[-b_0, b_0]$  (blanc) et on ôte en son centre un intervalle  $[-r_1 + b_1, r_1 - b_1]$  (noir); il reste deux segments blancs  $[\varepsilon_1 r_1 - b_1, \varepsilon_1 r_1 + b_1]$ , et on répète l'opération, de sorte qu'à la  $n$ -ième étape l'ensemble restant,  $E_n$ , soit la réunion des  $2^n$  segments blancs  $[\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \dots + \varepsilon_n r_n - b_n, \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \dots + \varepsilon_n r_n + b_n]$ .  $E$  est l'intersection des  $E_n$ . L'ensemble  $E_n \setminus E_{n+1}$  est l'ensemble noirci à la  $n$ -ième étape.

Observons que si  $f_n$  est un polynôme de degré  $p$  sur un intervalle  $[\alpha, \beta]$  de longueur  $> 2r_{n+1}$ , il en est de même de  $f_{n+1} = f_n * \varphi_{n+1}$  sur l'intervalle  $[\alpha + r_{n+1}, \beta - r_{n+1}]$ . Donc, si  $f_n$  est un polynôme de degré  $p$  sur un intervalle  $[\alpha, \beta]$  de longueur  $> 2b_n$ , il en est de même de  $f$  sur l'intervalle  $[\alpha + b_n, \beta - b_n]$ . Or  $f_1$  est constant sur l'intervalle  $[-r_1, r_1]$ ,  $f_2$  est linéaire sur chacun des segments  $[\varepsilon_1 r_1 - r_2, \varepsilon_1 r_1 + r_2]$ ,  $f_3$  est parabolique sur chacun des segments  $[\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 - r_3, \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + r_3]$  et ainsi de suite. Il s'ensuit que sur  $E_n \setminus E_{n+1}$  (réunion des intervalles noircis à la  $n$ -ième étape)  $f$  est localement un polynôme de degré  $n-1$ . Donc  $f$  est localement polynomiale en dehors de  $E$ .

### III. UNE MESURE SINGULIÈRE ET PRESQUE LISSE

Zygmund a appelé fonctions lisses les fonctions  $f$  telles que

$$\omega_2(f, t) = \sup_x \sup_{|h| \leq t} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| = o(t) \quad (t \rightarrow 0).$$

Il a aussi introduit la classe  $\mathcal{A}^*$  des fonctions  $f$  pour lesquelles

$$\omega_2(f, t) = 0(t) \quad (t \rightarrow 0);$$

nous dirons que ces dernières fonctions sont presque lisses. Si  $f$  est monotone et (presque) lisse, nous dirons aussi que la mesure dérivée  $df$  est (presque) lisse.

Par une voie très détournée, Duren, Shapiro et Shields ont établi l'existence de mesures singulières presque lisses [3]. Piranian en a donné des exemples explicites [5]. Enfin, récemment, H. S. Shapiro a obtenu des mesures singulières lisses, dont la primitive  $f$  satisfait à  $\omega_2(f, t) =$

$= O\left(t\left(\log \frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$  [6]. Nous développons ici un exemple qui avait été mentionné dans [5] sous le nom de Kahane's example, et nous montrons comment une variante permet d'obtenir le résultat de Shapiro.

Désignons par  $\omega_0$  le segment  $[0, 1]$ , et par  $\omega_j$  l'un quelconque des intervalles de la forme  $[p4^{-j}, (p+1)4^{-j}]$  contenus dans  $\omega_0$ . Nous construisons simultanément une suite de mesures  $d\mu_j$  et leurs supports  $E_j$  de la manière suivante:

$d\mu_0$  est la mesure de Lebesgue sur  $\omega_0$ ;

$d\mu_j$  est proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur chaque  $\omega_j$ ; on désigne par  $D_j(\omega_j)$  sa densité sur un  $\omega_j$  donné, et par  $E_j$  son support, c'est-à-dire la réunion des  $\omega_j$  où  $D_j(\omega_j) \neq 0$ ;

pour obtenir  $d\mu_{j+1}$  à partir de  $d\mu_j$ , on partage chaque  $\omega = \omega_j$  contenu dans  $E_j$  en quatre sous-intervalles égaux  $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4$  (ce sont des  $\omega_{j+1}$ ) et on pose

$$(1) \quad \begin{aligned} D_{j+1}(\omega^1) &= D_{j+1}(\omega^4) = D_j(\omega) - 1 \\ D_{j+1}(\omega^2) &= D_{j+1}(\omega^3) = D_j(\omega) + 1. \end{aligned}$$

Enfin, on pose  $d\mu = \lim d\mu_j$  et  $E = \lim E_j = \bigcap E_j$ .

Une autre définition de  $E$  est l'ensemble de tous les points  $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 4^{-j}$  ( $x_j = 0, 1, 2, 3$ ) tels que

$$(2) \quad 1 + \sum_{j=1}^k \varepsilon(x_j) > 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

où  $\varepsilon(0) = \varepsilon(3) = -1$  et  $\varepsilon(1) = \varepsilon(2) = 1$ . Si l'on considère les  $\varepsilon(x_j)$  comme des variables aléatoires indépendantes, la probabilité de (2) est nulle, donc l'ensemble  $E$  est de mesure nulle.

Pour chaque intervalle  $I$ , nous écrivons  $|I|$  pour sa longueur, et nous posons  $D(I) = \frac{1}{|I|} \mu(I)$ . Alors  $D(\omega_j) = D_j(\omega_j)$  pour tout intervalle  $\omega_j$ ,

et l'on prouve aisément par récurrence que, pour deux intervalles  $\omega_j$  ayant une extrémité commune, soit  $\omega'_j$  et  $\omega''_j$ , on a

$$(3) \quad |D(\omega'_j) - D(\omega''_j)| \leq 2.$$

Etant donné l'intervalle  $I$ , soit  $j$  le plus petit entier tel que  $4^{-j} \leq |I|$ . Désignons par  $\sum \omega_j$  la réunion des  $\omega_j$  contenus dans  $I$ , par  $\sum \omega_{j+1}$  la réunion des  $\omega_{j+1}$  contenus dans  $\overline{I - \sum \omega_j}$  (fermeture du complémentaire de  $\sum \omega_j$  par rapport à  $I$ ), par  $\sum \omega_{j+2}$  la réunion des  $\omega_{j+2}$  contenus dans  $\overline{I - \sum \omega_j - \sum \omega_{j+1}}$ , et ainsi de suite. Remarquons que chaque somme  $\sum$  contient au plus 6 termes (figure 2). Avec les notations évidentes nous avons

$$(4) \quad \begin{aligned} \mu(I) &= \mu(\sum \omega_j) + \mu(\sum \omega_{j+1}) + \dots = \\ &= \sum |\omega_j| D(\omega_j) + \sum |\omega_{j+1}| D(\omega_{j+1}) + \dots \end{aligned}$$

Soit  $\omega_{j-1}^I$  un  $\omega_{j-1}$  coupant  $I$  (il en existe au moins un, au plus deux). Dans la somme (4), on a

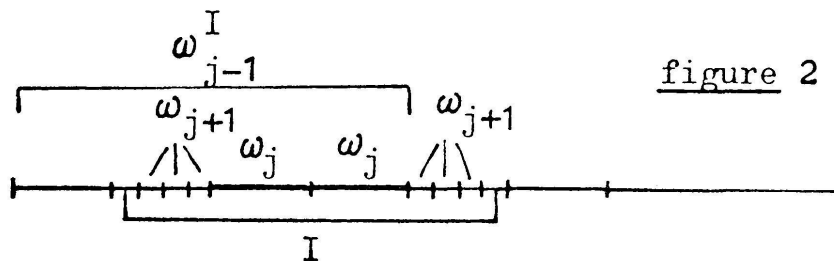
$$\begin{aligned} |D(\omega_j) - D(\omega_{j-1}^I)| &\leq 1 \quad \text{si} \quad \omega_j \subset \omega_{j-1}^I \\ |D(\omega_j) - D(\omega_{j-1}^I)| &\leq 3 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

(grâce à (3), écrit au rang  $j-1$ ), et pour tout  $k$

$$|D(\omega_{j+k}) - D(\omega_{j-1}^I)| \leq 3 + k.$$

Donc

$$\begin{aligned} |\mu(I) - |I| D(\omega_{j-1}^I)| &\leq 3 \sum |\omega_j| + (3+1) \sum (\omega_{j+1}) + \dots \leq \\ &\leq 3|I| + 6 \sum_{k=1}^{\infty} k 4^{-j-k} \leq 10|I|. \end{aligned}$$



Si maintenant  $I$  et  $I'$  sont deux segments égaux ayant un point commun, on peut choisir  $\omega_{j-1}^I = \omega_{j-1}^{I'}$ . Donc

$$(5) \quad |\mu(I) - \mu(I')| < 20|I|.$$

En désignant par  $f$  une primitive de  $\mu$ , cela signifie qu'on a

$$(6) \quad |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| < 20h$$

quels que soient  $x$  réel et  $h > 0$ , donc la mesure  $\mu$  construite est presque lisse. Cela établit la validité de l'exemple donné en [5].

Une variante intéressante est la suivante. Donnons-nous une suite positive  $c_j$  telle que  $c_0 = 1$ ,  $c_{j+1} = c_j$  ou  $\frac{1}{2} c_j$  ( $j=0, 1, \dots$ ) et  $\sum_1^{\infty} c_j^2 = \infty$ . Au lieu de (1), posons

$$D_{j+1}(\omega^\alpha) = D_j(\omega) + \varepsilon_{j+1}(\omega^\alpha) c_{j+1} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

où les  $\varepsilon_{j+1}(\omega^\alpha)$  valent  $\pm 1$  et sont choisis comme suit: si la densité de  $d\mu_j$  sur l'intervalle  $\omega_j$  qui est immédiatement à gauche (resp. à droite) de  $\omega$  est supérieure à  $D_j(\omega)$ , on prend  $\varepsilon_{j+1}(\omega^1) = 1$ , (resp.  $\varepsilon_{j+1}(\omega^4) = 1$ ), et sinon  $\varepsilon_{j+1}(\omega^1) = -1$  (resp.  $\varepsilon_{j+1}(\omega^4) = -1$ ); en outre,

$$\varepsilon_{j+1}(\omega^1) \varepsilon_{j+1}(\omega^2) = \varepsilon_{j+1}(\omega^3) \varepsilon_{j+1}(\omega^4) = -1.$$

On vérifie par récurrence, grâce au fait que chaque  $c_j$  divise les précédents, que les  $D_j(\omega_j)$  sont  $\geq 0$  et multiples de  $c_j$ .

Si l'on exclut les nombres  $x$  de la forme  $p4^{-n}$ , chaque  $x$  est contenu dans un  $\omega_j$  unique (pour  $j$  fixé). Posons

$$\varepsilon_j(x) = \varepsilon_j(\omega_j) \quad \text{si} \quad x \in \omega_j.$$

Les  $\varepsilon_j(x)$  sont des variables aléatoires indépendantes, et l'ensemble  $E$  support de  $d\mu$  est défini par les inégalités

$$1 + \sum_{j=1}^k c_j \varepsilon_j(x) > 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

En vertu de l'hypothèse  $\sum_1^{\infty} c_j^2 = \infty$  et du théorème de Rademacher-Khintchine-Kolmogoroff, ce système d'inégalités a une probabilité nulle, c'est-à-dire que  $E$  est de mesure nulle.

Au lieu de (3), on a maintenant

$$|D(\omega'_j) - D(\omega''_j)| \leq 2c_j$$

(en fait, d'après le choix des  $c_j$  et des  $\varepsilon_j$ , c'est nécessairement 0,  $c_j$  ou  $2c_j$ ). En poursuivant les calculs comme ci-dessus, on obtient au lieu de (5)

$$|\mu(I) - \mu(I')| < 20 c_{j-1} |I|$$

et au lieu de (6)

$$|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \leq h\varphi(h)$$

dès que  $\varphi(h)$  est une fonction croissante telle que  $\varphi(4^{-j}) \geq 20 c_{j-1}$ .

On obtient finalement le résultat suivant: si  $\varphi(h)$  est une fonction positive croissante, telle que  $\varphi(4h) \leq 2\varphi(h)$  et

$$\int_0^1 \varphi^2(h) \frac{dh}{h} = \infty,$$

il existe une mesure positive  $d\mu$ , dont le support est un ensemble fermé de mesure nulle, et dont une primitive  $f$  satisfait à la condition

$$\omega_2(f, h) = o(h\varphi(h)) \quad (h \rightarrow 0).$$

[Il suffit de choisir pour  $c_j$  la plus grande puissance négative de 2 inférieure à  $\frac{1}{20} \varphi(4^{-j-1})$ ].

Comme l'observe Shapiro dans [6], c'est (à la condition de régularité sur  $\varphi$  près) le meilleur résultat possible. En effet, il résulte d'un théorème de Stein et Zygmund (voir encore [6], appendice) que si  $f$  est une fonction continue telle que

$$\int_0^1 (\omega_2(f, h))^2 \frac{dh}{h} < \infty,$$

$f$  est absolument continue, avec une dérivée de carré sommable.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BESICOVITCH, A. S. The Kakeya problem. *Amer. Math. Monthly*, 70 (1963), 697-706.
- [2] DONOGHUE, W. F., Jr. Functions which are polynomials on a dense set. *London Math. Soc.*, 39 (1964), 533-536.
- [3] DUREN, P. L., H. S. SHAPIRO, and A. L. SHIELDS. Singular measures and domains not of Smirnov type. *Duke Math. J.*, 33 (1966), 247-254.
- [4] MANDELBROJT, S. *Séries adhérentes, régularisations des suites, applications*. Gauthier-Villars, 1952; voir aussi: Analytic functions and classes of infinitely differentiable functions. *The Rice Institute Pamphlet*, 29 (1942), 1-142.
- [5] PIRANIAN, G. Two monotonic, singular, uniformly almost smooth functions. *Duke Math. J.*, 33 (1966), 255-262.
- [6] SHAPIRO, H. S. Monotonic singular functions of high smoothness. *Michigan Math. J.* (sept. 1968, à paraître).

(Reçu le 27 Juin 1968)