II. Une fonction de classe C^∞ localement polynomiale

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

En particulier, $F^{gg} \cap F^{gd}$ et $F^{dd} \cap F^{dg}$ sont d'aires nulles, et il en est de même pour leurs transformées par les affinités horizontales de rapport 4 appliquant respectivement F^{gg} et F^{dd} sur F.

Il suit de là que la partie de F située au-dessous de la droite $y = \frac{1}{4}$ est d'aire nulle. Pour presque tout μ dans $[0, \frac{1}{4}]$, l'ensemble $(1-\mu)E + \frac{1}{2}\mu E$ est donc de mesure nulle. Autrement dit, pour presque tout λ dans $[0, \frac{1}{6}]$, $E + \lambda E$ est de mesure nulle. Or, pour tout $\lambda > 0$ et tout entier $n > 0$, $E + \lambda E$ est la réunion de 2^n ensembles translatés de $E + \lambda 4^{-n} E$. Donc $E + \lambda E$ est de mesure nulle pour presque tout λ positif, ce qui démontre les propositions 2) et 4).

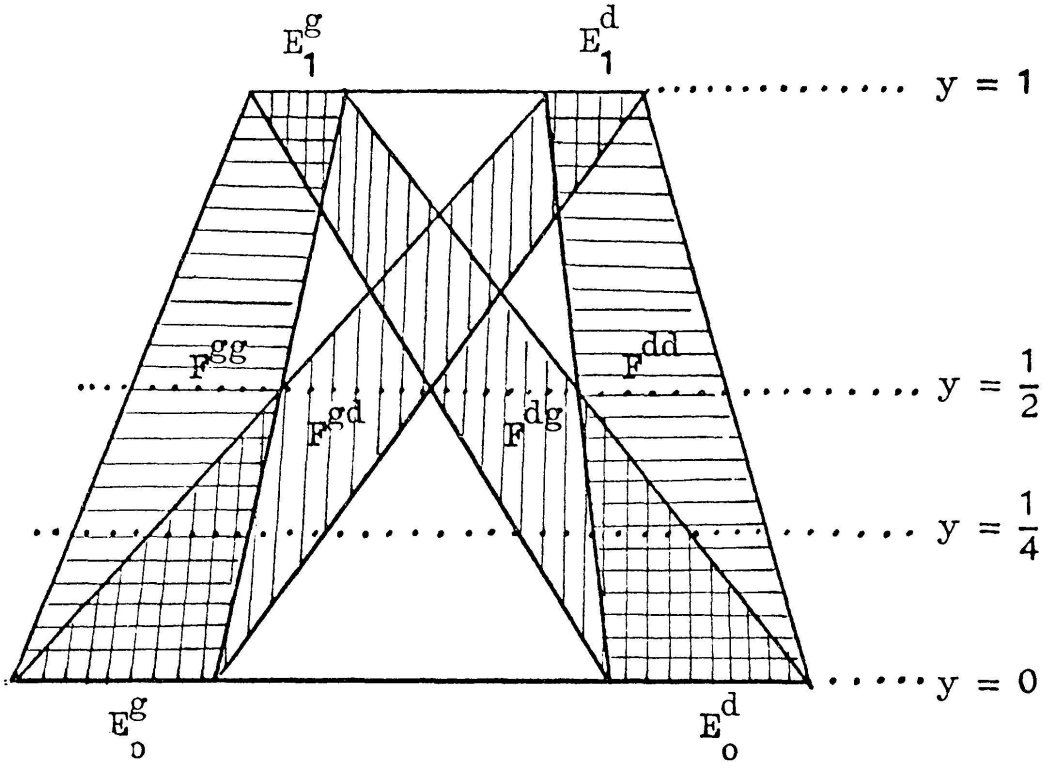

Figure 1

II. Une fonction de classe C^∞ localement polynomiale

Mandelbrojt a indiqué un procédé de construction de fonctions de classe C^∞ à support compact, par régularisations successives (cf. [4]). Nous allons constater que cette construction fournit une fonction localement polynomiale sur le complémentaire d'un ensemble parfait symétrique donné. On obtient ainsi sans peine des fonctions de classe C^∞ et localement polynomiales en dehors d'un ensemble parfait arbitrairement fin; une construction, moins simple, a été donnée par Donoghue [2].

Soit r_n une suite positive sommable ($\sum_1^\infty r_n = b_0 < \infty$). Notons φ_n la fonction paire égale à $\frac{1}{2r_n}$ sur $[0, r_n]$, et nulle sur $[r_n, \infty]$. Soit f_n la convolution $\varphi_1 * \varphi_2 * \ldots * \varphi_n$. On vérifie que f_n converge uniformément vers une fonction f de classe C^∞ et de support $[-b_0, b_0]$ quand $n \to \infty$ [4].

Posons $b_n = r_{n+1} + r_{n+2} + \ldots$ et supposons maintenant $r_n > b_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). L'ensemble des points $\sum_1^\infty \varepsilon_n r_n$ ($\varepsilon_n = \pm 1$) est un ensemble parfait symétrique que nous noterons E. A une translation près, tout ensemble parfait symétrique est de cette forme, pour un choix convenable de la suite r_n. Pour construire E, on peut procéder par étapes: on part du segment $[-b_0, b_0]$ (blanc) et on ôte en son centre un intervalle $[-r_1+b_1, r_1-b_1]$ (noir); il reste deux segments blancs $[\varepsilon_1 r_1 - b_1, \varepsilon_1 r_1 + b_1]$, et on répète l'opération, de sorte qu'à la n-ième étape l'ensemble restant, E_n, soit la réunion des 2^n segments blancs $[\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \ldots + \varepsilon_n r_n - b_n, \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \ldots + \varepsilon_n r_n + b_n]$. E est l'intersection des E_n. L'ensemble $E_n \setminus E_{n+1}$ est l'ensemble noirci à la n-ième étape.

Observons que si f_n est un polynome de degré p sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de longueur $> 2r_{n+1}$, il en est de même de $f_{n+1} = f_n * \varphi_{n+1}$ sur l'intervalle $[\alpha + r_{n+1}, \beta - r_{n+1}]$. Donc, si f_n est un polynome de degré p sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de longueur $> 2b_n$, il en est de même de f sur l'intervalle $[\alpha + b_n, \beta - b_n]$. Or f_1 est constant sur l'intervalle $[-r_1, r_1]$, f_2 est linéaire sur chacun des segments $[\varepsilon_1 r_1 - r_2, \varepsilon_1 r_1 + r_2]$, f_3 est parabolique sur chacun des segments $[\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 - r_3, \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + r_3]$ et ainsi de suite. Il s'ensuit que sur $E_n \setminus E_{n+1}$ (réunion des intervalles noircis à la n-ième étape) f est localement un polynome de degré $n-1$. Donc f est localement polynomiale en dehors de E.

III. Une mesure singulière et presque lisse

Zygmund a appelé fonctions lisses les fonctions f telles que

$$\omega_2(f, t) = \sup_x \sup_{|h| \leq t} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| = o(t) \qquad (t \to 0).$$

Il a aussi introduit la classe $\Lambda*$ des fonctions f pour lesquelles

$$\omega_2(f, t) = 0(t) \qquad (t \to 0);$$