TROIS NOTES SUR LES ENSEMBLES PARFAITS LINÉAIRES

J.-P. KAHANE

A la mémoire de J. Karamata

Les trois notes qui suivent ont pour seul trait commun de traiter de problèmes élémentaires mettant en jeu des ensembles parfaits totalement discontinus sur la droite.

I. SEGMENTS JOIGNANT DEUX ENSEMBLES DE CANTOR

Besicovitch, puis Schoenberg, ont construit des ensembles plans d'aire nulle et contenant un segment de longueur unité parallèle à n'importe quelle direction (cf. [1]). Nous allons donner une variante, très simple, de leur construction, fondée sur l'étude des ensembles $E + \lambda E$, où E est un ensemble du type de Cantor.

Soit E l'ensemble parfait symétrique à rapport de dissection $\frac{1}{4}$, construit sur le segment $[0, 1]$, c'est-à-dire l'ensemble des points

$$x = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{4^n}, \qquad \varepsilon_n = 0 \text{ ou } 1 .$$

Dans le plan cartésien, où les coordonnées sont notées x, y, considérons les ensembles

$$E_0 : \ y = 0 , \qquad x \in E$$

$$E_1 : \ y = 1 , \qquad 2(x - \xi) \in E$$

(ξ réel donné). Soit F la réunion des segments du plan qui s'appuient sur E_0 et E_1 (c'est-à-dire qui ont une extrémité sur E_0 et l'autre sur E_1). On désigne par I_0 et I_1 les segments supports de E_0 et E_1 respectivement.

Nous allons établir que

1) F *contient un translaté au moins (et deux au plus) de tout segment qui s'appuie sur* I_0 *et* I_1;

2) F *est un compact d'aire nulle.*

Ces propositions ne sont rien d'autre — nous allons le vérifier rapidement — que l'expression géométrique des suivantes:

3) tout nombre entre 0 et $\frac{3}{2}$ s'écrit au moins d'une façon, et au plus de deux façons, sous la forme $x + \frac{x'}{2}$, $x \in E$, $x' \in E$; en particulier, $E + \frac{1}{2}E = [0, \frac{3}{2}]$;

4) pour presque tout λ, l'ensemble $E + \lambda E$ est de mesure nulle (désormais, mesure $=$ mesure linéaire).

La proposition 3) est à peu près évidente: tout nombre entre 0 et $\frac{3}{2}$ s'écrit, au moins d'une façon et au plus de deux façons, sous la forme

$$\frac{3}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{2\,\varepsilon_n + \varepsilon_n'}{4^n}\,, \qquad \varepsilon_n = 0 \text{ ou } 1\,, \qquad \varepsilon_n' = 0 \text{ ou } 1\,.$$

La proposition 1) ne dépend pas du choix de ξ. Or, pour $\xi = -\frac{1}{2}$, $2(x-\xi) \in E \Leftrightarrow -2x \in E$. Dans ce cas, les longueurs des projections horizontales des segments qui s'appuient sur E_0 et E_1 sont les nombres $x + \frac{x'}{2}$ $(x \in E,\ x' \in E)$, c'est-à-dire, d'après la proposition 3), tous les nombres entre 0 et $\frac{3}{2}$. La proposition 1) en résulte, dans le cas $\xi = -\frac{1}{2}$, donc dans le cas général.

Les points de F d'ordonnée μ $(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$ ont pour abscisses

$$(1-\mu)\,x + \mu\,x' \quad (x \in E,\ 2(x'-\xi) \in E)\,.$$

Il revient au même de dire que F est d'aire nulle ou de dire que, pour presque tout μ dans $[0, 1]$, l'ensemble

$$(1-\mu)\,E + \frac{1}{2}\,\mu\,E$$

est de mesure nulle. Les propositions 2) et 4) sont donc équivalentes.

Désignons par E_i^g et E_i^d respectivement la moitié gauche et la moitié droite de E_i $(i=0$ ou $1)$, et désignons par $F^{\alpha\beta}$ $(\alpha = g$ ou d, $\beta = g$ ou $d)$ la réunion des segments qui s'appuient sur E_0^α et E_1^β. F est la réunion des quatre ensembles $F^{\alpha\beta}$ (figure 1).

Or chaque $F^{\alpha\beta}$ s'obtient à partir de F par une affinité horizontale de rapport $\frac{1}{4}$ (c'est-à-dire une transformation $(x, y) \to (x', y')$ de la forme

$$x' = x_0' + \frac{x}{4} + \rho y$$

$$y' = y \qquad\qquad).$$

Les aires des $F^{\alpha\beta}$ sont donc toutes égales au quart de celle de F. Les parties communes à deux $F^{\alpha\beta}$ sont donc d'aire nulle.

En particulier, $F^{gg} \cap F^{gd}$ et $F^{dd} \cap F^{dg}$ sont d'aires nulles, et il en est de même pour leurs transformées par les affinités horizontales de rapport 4 appliquant respectivement F^{gg} et F^{dd} sur F.

Il suit de là que la partie de F située au-dessous de la droite $y = \frac{1}{4}$ est d'aire nulle. Pour presque tout μ dans $[0, \frac{1}{4}]$, l'ensemble $(1-\mu) E + \frac{1}{2} \mu E$ est donc de mesure nulle. Autrement dit, pour presque tout λ dans $[0, \frac{1}{6}]$, $E + \lambda E$ est de mesure nulle. Or, pour tout $\lambda > 0$ et tout entier $n > 0$, $E + \lambda E$ est la réunion de 2^n ensembles translatés de $E + \lambda 4^{-n} E$. Donc $E + \lambda E$ est de mesure nulle pour presque tout λ positif, ce qui démontre les propositions 2) et 4).

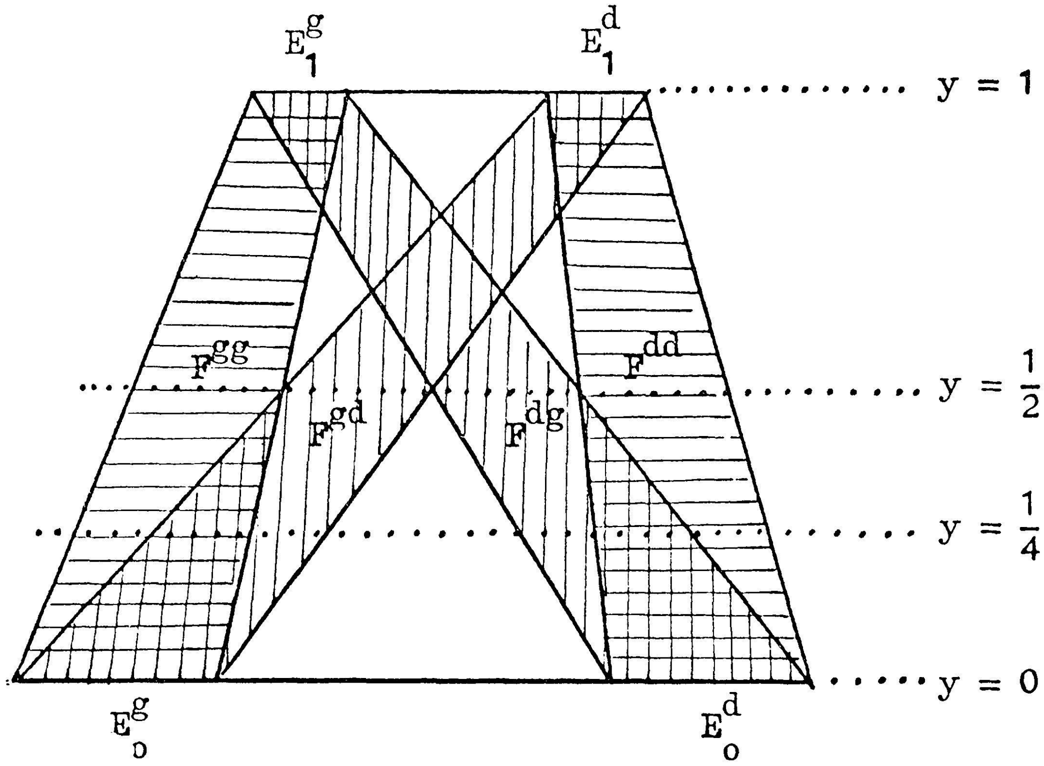

Figure 1

II. Une fonction de classe C^∞ localement polynomiale

Mandelbrojt a indiqué un procédé de construction de fonctions de classe C^∞ à support compact, par régularisations successives (cf. [4]). Nous allons constater que cette construction fournit une fonction localement polynomiale sur le complémentaire d'un ensemble parfait symétrique donné. On obtient ainsi sans peine des fonctions de classe C^∞ et localement polynomiales en dehors d'un ensemble parfait arbitrairement fin; une construction, moins simple, a été donnée par Donoghue [2].

Soit r_n une suite positive sommable ($\sum_1^\infty r_n = b_0 < \infty$). Notons φ_n la fonction paire égale à $\frac{1}{2r_n}$ sur $[0, r_n]$, et nulle sur $[r_n, \infty]$. Soit f_n la convolution $\varphi_1 * \varphi_2 * \ldots * \varphi_n$. On vérifie que f_n converge uniformément vers une fonction f de classe C^∞ et de support $[-b_0, b_0]$ quand $n \to \infty$ [4].

Posons $b_n = r_{n+1} + r_{n+2} + \ldots$ et supposons maintenant $r_n > b_n$ ($n=1, 2, \ldots$). L'ensemble des points $\sum_1^\infty \varepsilon_n r_n$ ($\varepsilon_n = \pm 1$) est un ensemble parfait symétrique que nous noterons E. A une translation près, tout ensemble parfait symétrique est de cette forme, pour un choix convenable de la suite r_n. Pour construire E, on peut procéder par étapes: on part du segment $[-b_0, b_0]$ (blanc) et on ôte en son centre un intervalle $[-r_1+b_1, r_1-b_1]$ (noir); il reste deux segments blancs $[\varepsilon_1 r_1 - b_1, \varepsilon_1 r_1 + b_1]$, et on répète l'opération, de sorte qu'à la n-ième étape l'ensemble restant, E_n, soit la réunion des 2^n segments blancs $[\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \ldots + \varepsilon_n r_n - b_n, \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + + \ldots + \varepsilon_n r_n + b_n]$. E est l'intersection des E_n. L'ensemble $E_n \setminus E_{n+1}$ est l'ensemble noirci à la n-ième étape.

Observons que si f_n est un polynome de degré p sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de longueur $> 2r_{n+1}$, il en est de même de $f_{n+1} = f_n * \varphi_{n+1}$ sur l'intervalle $[\alpha + r_{n+1}, \beta - r_{n+1}]$. Donc, si f_n est un polynome de degré p sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de longueur $> 2b_n$, il en est de même de f sur l'intervalle $[\alpha + b_n, \beta - b_n]$. Or f_1 est constant sur l'intervalle $[-r_1, r_1]$, f_2 est linéaire sur chacun des segments $[\varepsilon_1 r_1 - r_2, \varepsilon_1 r_1 + r_2]$, f_3 est parabolique sur chacun des segments $[\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 - r_3, \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + r_3]$ et ainsi de suite. Il s'ensuit que sur $E_n \setminus E_{n+1}$ (réunion des intervalles noircis à la n-ième étape) f est localement un polynome de degré $n-1$. Donc f est localement polynomiale en dehors de E.

III. Une mesure singulière et presque lisse

Zygmund a appelé fonctions lisses les fonctions f telles que

$$\omega_2(f, t) = \sup_x \sup_{|h| \leq t} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| = o(t) \qquad (t \to 0).$$

Il a aussi introduit la classe Λ_* des fonctions f pour lesquelles

$$\omega_2(f, t) = 0(t) \qquad (t \to 0);$$

nous dirons que ces dernières fonctions sont presque lisses. Si f est monotone et (presque) lisse, nous dirons aussi que la mesure dérivée df est (presque) lisse.

Par une voie très détournée, Duren, Shapiro et Shields ont établi l'existence de mesures singulières presque lisses [3]. Piranian en a donné des exemples explicites [5]. Enfin, récemment, H. S. Shapiro a obtenu des mesures singulières lisses, dont la primitive f satisfait à $\omega_2(f, t) = = O\left(t\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$ [6]. Nous développons ici un exemple qui avait été mentionné dans [5] sous le nom de Kahane's example, et nous montrons comment une variante permet d'obtenir le résultat de Shapiro.

Désignons par ω_0 le segment [0, 1], et par ω_j l'un quelconque des intervalles de la forme $[p4^{-j}, (p+1)\, 4^{-j}]$ contenus dans ω_0. Nous construisons simultanément une suite de mesures $d\mu_j$ et leurs supports E_j de la manière suivante:

$d\mu_0$ est la mesure de Lebesgue sur ω_0;

$d\mu_j$ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue sur chaque ω_j; on désigne par $D_j(\omega_j)$ sa densité sur un ω_j donné, et par E_j son support, c'est-à-dire la réunion des ω_j où $D_j(\omega_j) \neq 0$;

pour obtenir $d\mu_{j+1}$ à partir de $d\mu_j$, on partage chaque $\omega = \omega_j$ contenu dans E_j en quatre sous-intervalles égaux ω^1, ω^2, ω^3, ω^4 (ce sont des ω_{j+1}) et on pose

$$(1) \qquad \begin{aligned} D_{j+1}(\omega^1) &= D_{j+1}(\omega^4) = D_j(\omega) - 1 \\ D_{j+1}(\omega^2) &= D_{j+1}(\omega^3) = D_j(\omega) + 1\,. \end{aligned}$$

Enfin, on pose $d\mu = \lim d\mu_j$ et $E = \lim E_j = \cap\, E_j$.

Une autre définition de E est l'ensemble de tous les points $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 4^{-j}$ (x_1=0, 1, 2, 3) tels que

$$(2) \qquad 1 + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon(x_j) > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)\,,$$

où $\varepsilon(0) = \varepsilon(3) = -1$ et $\varepsilon(1) = \varepsilon(2) = 1$. Si l'on considère les $\varepsilon(x_j)$ comme des variables aléatoires indépendantes, la probabilité de (2) est nulle, donc l'ensemble E est de mesure nulle.

Pour chaque intervalle I, nous écrivons $|I|$ pour sa longueur, et nous posons $D(I) = \frac{1}{|I|}\,\mu(I)$. Alors $D(\omega_j) = D_j(\omega_j)$ pour tout intervalle ω_j, et l'on prouve aisément par récurrence que, pour deux intervalles ω_j ayant une extrémité commune, soit ω_j' et ω_j'', on a

$$(3) \qquad | D(\omega_j') - D(\omega_j'') | \leqq 2 .$$

Etant donné l'intervalle I, soit j le plus petit entier tel que $4^{-j} \leqslant |I|$. Désignons par $\sum \omega_j$ la réunion des ω_j contenus dans I, par $\sum \omega_{j+1}$ la réunion des ω_{j+1} contenus dans $\overline{I - \Sigma \omega_j}$ (fermeture du complémentaire de $\sum \omega_j$ par rapport à I), par $\sum \omega_{j+2}$ la réunion des ω_{j+2} contenus dans $\overline{I - \Sigma \omega_j - \Sigma \omega_{j+1}}$, et ainsi de suite. Remarquons que chaque somme $\sum$ contient au plus 6 termes (figure 2). Avec les notations évidentes nous avons

$$(4) \qquad \begin{aligned} \mu(I) &= \mu(\textstyle\sum \omega_j) + \mu(\textstyle\sum \omega_{j+1}) + \ldots = \\ &= \textstyle\sum |\omega_j| \, D(\omega_j) + \sum |\omega_{j+1}| \, D(\omega_{j+1}) + \ldots \end{aligned}$$

Soit ω_{j-1}^I un ω_{j-1} coupant I (il en existe au moins un, au plus deux). Dans la somme (4), on a

$$| D(\omega_j) - D(\omega_{j-1}^I) | \leqslant 1 \qquad \text{si} \qquad \omega_j \subset \omega_{j-1}^I$$

$$| D(\omega_j) - D(\omega_{j-1}^I) | \leqslant 3 \ \text{sinon.}$$

(grâce à (3), écrit au rang $j-1$), et pour tout k

$$| D(\omega_{j+k}) - D(\omega_{j-1}^I) | \leqslant 3 + k .$$

Donc

$$| \mu(I) - |I| \, D(\omega_{j-1}^I) | \leqslant 3 \textstyle\sum |\omega_j| + (3+1) \sum (\omega_{j+1}) + \ldots \leqq$$

$$\leqslant 3 |I| + 6 \sum_{k=1}^{\infty} k \, 4^{-j-k} \leqslant 10 |I| .$$

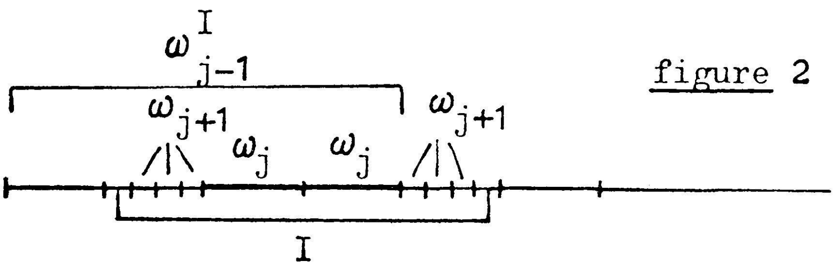

figure 2

Si maintenant I et I' sont deux segments égaux ayant un point commun, on peut choisir $\omega_{j-1}^I = \omega_{j-1}^{I'}$. Donc

$$(5) \qquad | \mu(I) - \mu(I') | < 20 |I| .$$

En désignant par f une primitive de μ, cela signifie qu'on a

$$(6) \qquad |f(x+h)+f(x-h)-2f(x)| < 20\,h$$

quels que soient x réel et $h > 0$, donc la mesure μ construite est presque lisse.

Cela établit la validité de l'exemple donné en [5].

Une variante intéressante est la suivante. Donnons-nous une suite positive c_j telle que $c_0 = 1$, $c_{j+1} = c_j$ ou $\frac{1}{2}c_j$ $(j=0, 1, ...)$ et $\sum_1^\infty c_j^2 = \infty$. Au lieu de (1), posons

$$D_{j+1}(\omega^\alpha) = D_j(\omega) + \varepsilon_{j+1}(\omega^\alpha)\,c_{j+1} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

où les $\varepsilon_{j+1}(\omega^\alpha)$ valent ± 1 et sont choisis comme suit: si la densité de $d\mu_j$ sur l'intervalle ω_j qui est immédiatement à gauche (resp. à droite) de ω est supérieure à $D_j(\omega)$, on prend $\varepsilon_{j+1}(\omega^1) = 1$, (resp. $\varepsilon_{j+1}(\omega^4) = 1$), et sinon $\varepsilon_{j+1}(\omega^1) = -1$ (resp. $\varepsilon_{j+1}(\omega^4) = -1$); en outre,

$$\varepsilon_{j+1}(\omega^1)\,\varepsilon_{j+1}(\omega^2) = \varepsilon_{j+1}(\omega^3)\,\varepsilon_{j+1}(\omega^4) = -1\,.$$

On vérifie par récurrence, grâce au fait que chaque c_j divise les précédents, que les $D_j(\omega_j)$ sont $\geqslant 0$ et multiples de c_j.

Si l'on exclut les nombres x de la forme $p4^{-n}$, chaque x est contenu dans un ω_j unique (pour j fixé). Posons

$$\varepsilon_j(x) = \varepsilon_j(\omega_j) \qquad \text{si} \qquad x \in \omega_j\,.$$

Les $\varepsilon_j(x)$ sont des variables aléatoires indépendantes, et l'ensemble E support de $d\mu$ est défini par les inégalités

$$1 + \sum_{j=1}^{k} c_j \varepsilon_j(x) > 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)\,.$$

En vertu de l'hypothèse $\sum_1^\infty c_j^2 = \infty$ et du théorème de Rademacher-Khintchine-Kolmogoroff, ce système d'inégalités a une probabilité nulle, c'est-à-dire que E est de mesure nulle.

Au lieu de (3), on a maintenant

$$|D(\omega_j') - D(\omega_j'')| \leqslant 2c_j$$

(en fait, d'après le choix des c_j et des ε_j, c'est nécessairement 0, c_j ou $2c_j$). En poursuivant les calculs comme ci-dessus, on obtient au lieu de (5)

$$|\mu(I) - \mu(I')| < 20\,c_{j-1}\,|I|$$

et au lieu de (6)

$$|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)| \leqslant h\varphi(h)$$

dès que $\varphi(h)$ est une fonction croissante telle que $\varphi(4^{-j}) \geqslant 20\, c_{j-1}$.

On obtient finalement le résultat suivant: *si $\varphi(h)$ est une fonction positive croissante, telle que $\varphi(4h) \leqslant 2\,\varphi(h)$ et*

$$\int_0^1 \varphi^2(h)\,\frac{dh}{h} = \infty\,,$$

il existe une mesure positive dμ, *dont le support est un ensemble fermé de mesure nulle, et dont une primitive* f *satisfait à la condition*

$$\omega_2(f,h) = 0\big(h\varphi(h)\big) \qquad (h \to 0)\,.$$

[Il suffit de choisir pour c_j la plus grande puissance négative de 2 inférieure à $\frac{1}{20}\,\varphi(4^{-j-1})$].

Comme l'observe Shapiro dans [6], c'est (à la condition de régularité sur φ près) le meilleur résultat possible. En effet, il résulte d'un théorème de Stein et Zygmund (voir encore [6], appendice) que si f est une fonction continue telle que

$$\int_0^1 (\omega_2(f,h))^2\,\frac{dh}{h} < \infty\,,$$

f est absolument continue, avec une dérivée de carré sommable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Besicovitch, A. S. The Kakeya problem. *Amer. Math. Monthly*, 70 (1963), 697-706.

[2] Donoghue, W. F., Jr. Functions which are polynomials on a dense set. *London Math. Soc.*, 39 (1964), 533-536.

[3] Duren, P. L., H. S. Shapiro, and A. L. Shields. Singular measures and domains not of Smirnov type. *Duke Math. J.*, 33 (1966), 247-254.

[4] Mandelbrojt, S. *Séries adhérentes, régularisations des suites, applications.* Gauthier-Villars, 1952; voir aussi: Analytic functions and classes of infinitely differentiable functions. *The Rice Institute Pamphlet*, 29 (1942), 1-142.

[5] Piranian, G. Two monotonic, singular, uniformly almost smooth functions. *Duke Math. J.*, 33 (1966), 255-262.

[6] Shapiro, H. S. Monotonic singular functions of high smoothness. *Michigan Math. J.* (sept. 1968, à paraître).

(Reçu le 27 Juin 1968)

Faculté des Sciences
de l'Université de Paris à Orsay
91-Orsay