4. Fonctions multiplicatives et fonctions additives

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **15 (1969)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

D'autre part, si on a (9), on a nécessairement

$$h = E(f) \quad \text{car} \quad E(h) = h$$

et
$$E(f) = E(g) * E(h) = e_2 * E(h) = E(h).$$

On voit de suite que $E^{-1}(e_2)$ est l'ensemble des $g \in G_2$ telles que

$$g(1,1) = 1,$$
$$g(m,1) = 0 \quad \text{pour } m>1$$

et
$$g(1,n) = 0 \quad \text{pour } n>1.$$

On a ainsi le résultat suivant:

A toute fonction f de G_2 correspond une fonction g unique satisfaisant à

$$g(1,1) = 1,$$
$$g(m,1) = 0 \quad \text{pour } m>1 \qquad \text{et} \qquad g(1,n) = 0 \quad \text{pour } n>1,$$

et telle que l'on ait pour m et $n \geqslant 1$

$$(10) \qquad f(m,n) = \frac{1}{f(1,1)} \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) f\left(\frac{m}{d_1}, 1\right) f\left(1, \frac{n}{d_2}\right).$$

On peut supprimer dans cet énoncé la condition $g(1,1) = 1$, car elle est une conséquence de (10) pour $m = n = 1$. On peut aussi supprimer dans (10) le facteur $\frac{1}{f(1,1)}$, en multipliant la fonction g par ce facteur. On obtient ainsi l'énoncé suivant:

A toute fonction f de G_2 correspond une fonction g unique satisfaisant à

$$(11) \qquad g(m,1) = 0 \text{ pour } m>1 \qquad \text{et} \qquad g(1,n) = 0 \text{ pour } n>1$$

et telle que l'on ait pour m et $n \geqslant 1$

$$(12) \qquad f(m,n) = \sum_{\substack{d_1/m \\ d_2/n}} g(d_1, d_2) f\left(\frac{m}{d_1}, 1\right) f\left(1, \frac{n}{d_2}\right).$$

4. Fonctions multiplicatives et fonctions additives

La fonction f de $\mathscr{A}_2$ sera dite multiplicative si l'on a

$$f(1,1) = 1$$

et $f(m' m'', n' n'') = f(m', n') f(m'', n'')$ lorsque $(m' n', m'' n'') = 1$ [1]).

Elle sera dite additive si l'on a

$f(m' m'', n' n'') = f(m', n') + f(m'', n'')$ lorsque $(m' n', m'' n'') = 1$

(ce qui entraîne $f(1, 1) = 0$, comme on le voit en prenant $m' = m'' = n' = n'' = 1$).

Le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple de m et n sont des fonctions multiplicatives de m et n. Il en est de même de la fonction égale à 1 quand $(m, n) = 1$ et à zéro quand $(m, n) > 1$.

Le nombre des diviseurs premiers communs à m et n, la somme de ces diviseurs, sont des fonctions additives de m et n.

On voit immédiatement qu'une fonction multiplicative, ou additive, est complètement déterminée quand on connaît ses valeurs pour tous les couples $[p^j, p^k]$, où p est un nombre premier et j et k sont des entiers $\geqslant 0$ tels que $j+k > 0$.

Plus précisément, soit ρ_p la fonction de $\mathscr{A}_1$ définie par

$$\rho_p(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p \nmid n\,, \\ p^r & \text{si} \quad p^r / n \quad \text{et} \quad p^{r+1} \nmid n, r > 0\,. \end{cases}$$

Si f est multiplicative, on a

$$f(m, n) = \prod_{p/mn} f[\rho_p(m), \rho_p(n)]\,. \tag{13}$$

Si f est additive, on a

$$f(m, n) = \sum_{p/mn} f[\rho_p(m), \rho_p(n)]\,.$$

Dans les deux cas, les valeurs de $f(p^j, p^k)$ peuvent être choisies arbitrairement pour tous les nombres premiers p et tous les couples $[j, k]$ d'entiers $\geqslant 0$ tels que $j+k > 0$.

4.1. Nous désignerons par $\mathfrak{M}_2$ l'ensemble des fonctions de $\mathscr{A}_2$ qui sont multiplicatives, $\mathfrak{M}_1$ désignant l'ensemble des fonctions multiplicatives d'un entier > 0.

Il est évident que $\mathfrak{M}_2 \subset G_2$. En fait, $\mathfrak{M}_2$ est un sous-groupe de G_2, comme $\mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de G_1.

Tout d'abord, on voit immédiatement que, si f et $g \in \mathfrak{M}_2$, $f_* g \in \mathfrak{M}_2$.

En effet, si $(m' n', m'' n'') = 1$, on a $(m', m'') = (n', n'') = 1$ et on obtient tous les diviseurs de $m' m''$, chacun une fois, en formant tous les

---

[1]) La condition $f(1, 1) = 1$ est conséquence de la deuxième condition si l'on suppose que f n'est pas identiquement nulle. Nous l'introduisons pour écarter la fonction identiquement nulle.

produits $d'_1\, d''_1$ où d'_1/m' et d''_1/m'', et tous les diviseurs de $n'\, n''$, chacun une fois, en formant tous les produits $d'_2\, d''_2$, où d'_2/n' et d''_2/n''.

On a d'ailleurs

$$(d'_1\, d'_2, d''_1\, d''_2) = \left(\frac{m'}{d'_1}\,\frac{n'}{d'_2}, \frac{m''}{d''_1}\,\frac{n''}{d''_2}\right) = 1.$$

On voit ainsi que, si $h = f * g$, avec f et $g \in \mathfrak{M}_2$, et si $(m'\, n', m''\, n'') = 1$, on a

$$\begin{aligned} h(m'\, n', m''\, n'') &= \sum_{\substack{d'_1/m',\, d''_1/m'' \\ d'_2/n',\, d''_2/n''}} f(d'_1 d''_1, d'_2\, d''_2)\, g\left(\frac{m'\, m''}{d'_1\, d''_1}, \frac{n'\, n''}{d'_2\, d''_2}\right) \\ &= \sum_{\substack{d'_1/m',\, d''_1/m'' \\ d'_2/n',\, d''_2/n''}} f(d'_1, d'_2)\, g\left(\frac{m'}{d'_1}, \frac{n'}{d'_2}\right) f(d''_1, d''_2)\, g\left(\frac{m''}{d''_1}, \frac{n''}{d''_2}\right) \\ &= \left\{\sum_{\substack{d'_1/m' \\ d'_2/n'}} f(d'_1, d'_2)\, g\left(\frac{m'}{d'_1}, \frac{n'}{d'_2}\right)\right\}\left\{\sum_{\substack{d''_1/m'' \\ d''_2/n''}} f(d''_1, d''_2)\, g\left(\frac{m''}{d''_1}, \frac{n''}{d''_2}\right)\right\} \\ &= h(m', n')\, h(m'', n''). \end{aligned}$$

Pour montrer que, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $f^{-*} \in \mathfrak{M}_2$, on peut procéder de la façon suivante.

On montre que, pour chaque nombre premier p, on peut déterminer les nombres $a_p(j, k)$, où j et k sont des entiers $\geqslant 0$ et $j+k>0$, de façon que l'on ait pour j et $k \geqslant 0$ et $j+k>0$

$$f(p^j, p^k) + \sum_{\substack{0 \leq j' \leq j \\ 0 \leq k' \leq k \\ j'+k'>0}} f(p^{j-j'}, p^{k-k'})\, a_p(j', k') = 0. \tag{14}$$

Pour cela, on fait un raisonnement semblable à celui par lequel on a montré au § 2.1 que, si $f \in \mathscr{A}_2$ et $f(1, 1) \neq 0$, f est inversible.

Ceci dit, on peut déterminer une fonction g de $\mathfrak{M}_2$ par

$$g(p^j, p^k) = a_p(j, k) \qquad \text{pour} \qquad j \geqslant 0, k \geqslant 0, j + k > 0.$$

On sait que $f * g \in \mathfrak{M}_2$. Mais (14) montre que, si $h = f * g$, on a

$$h(p^j, p^k) = 0 \qquad \text{pour} \qquad j \geqslant 0, k \geqslant 0, j + k > 0,$$

et, d'après (13) appliquée à h, ceci entraîne $h = e_2$.

Donc $g = f^{-*}$.

4.1.1. Il est clair que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset G_1 \otimes G_1$ et il résulte de (7) et (8) que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de $G_1 \otimes G_1$, donc de G_2.

On voit immédiatement que $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$. Par suite $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ est un sous-groupe de $\mathfrak{M}_2$.

E étant l'endomorphisme de G_2 considéré au § 3, soit $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{M}_2 \cap E^{-1}(e_2)$.

$\mathfrak{N}_2$ est un sous-groupe de G_2, comme intersection de deux sous-groupes, donc est un sous-groupe de $\mathfrak{M}_2$.

$\mathfrak{M}_2$ est produit direct de $\mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$.

En effet, on a vu au § 3 que G_2 est produit direct de $E^{-1}(e_2)$ et $G_1 \otimes G_1$ et que, dans l'expression d'une fonction f de G_2 sous la forme

$$f = g_* h, \quad \text{où} \quad g \in E^{-1}(e_2) \quad \text{et} \quad h \in G_1 \otimes G_1,$$

on a $h = E(f)$ et $g = f_* h^{-*}$.

Mais on voit immédiatement que, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $E(f) \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$. Donc, si $f \in \mathfrak{M}_2$, $h \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1$ et par suite $h \in \mathfrak{M}_2$, $g \in \mathfrak{M}_2$ et finalement $g \in \mathfrak{N}_2$. De plus, l'expression de f sous la forme

$$f = g_* h, \quad \text{où} \quad g \in \mathfrak{N}_2 \quad \text{et} \quad h \in \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1,$$

est unique parce que $\mathfrak{N}_2 \subset E^{-1}(e_2)$ et $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_1 \subset G_1 \otimes G_1$.

On voit de suite que $\mathfrak{N}_2$ est l'ensemble des fonctions g de $\mathfrak{M}_2$ qui satisfont à

$$g(p^j, p^k) = 0 \quad \text{quand } j \text{ ou } k = 0 \text{ mais } j+k > 0,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$g(m, n) = 0 \quad \text{quand } \{p \mid p/m\} \neq \{p \mid p/n\}.$$

5. Fonctions de $\mathscr{A}_2$ comme opérateurs

Il est classique d'utiliser les fonctions de $\mathscr{A}_1$ comme opérateurs dans l'espace vectoriel des fonctions complexes définies sur l'intervalle $[1, +\infty[$, espace vectoriel que nous désignerons par X_1:

a étant une fonction de $\mathscr{A}_1$ et F une fonction de X_1, on désigne par $a \perp F$, par exemple, la fonction G de X_1 définie par

$$G(x) = \sum_{n \leq x} a(n) F\left(\frac{x}{n}\right).$$

On peut de même utiliser les fonctions de $\mathscr{A}_2$ comme opérateurs dans l'espace vectoriel X_2 des fonctions complexes de deux variables réelles $\geqslant 1$.