Appendice: le principe de clivage

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

Preuve : Il suffit de se rappeler que ξ^J est associé au U-fibré principal G_U par la représentation ι^J de U, et d'appliquer la formule trouvée au § 4.

Convention d'écriture : On écrit seulement $-\alpha_{\mathbf{R}}^J$ au lieu de $\tau_{G_T}(\omega_\alpha^J)$, de sorte que la formule précédente devient

$$q^*(c(G/U)) = \prod (1-\alpha_{\mathbf{R}}^J).$$

Exemple :

Reprenons $P\mathbf{C}^n$ (cf. §1), pour lequel on sait que $\alpha_{\mathbf{R}}^J = x_\alpha - x_1$, $\alpha > 1$, donc $q^*(c(P\mathbf{C}^n)) = \prod_{\alpha>1} (1+x_1-x_\alpha)$. Considérons $\mathbf{C}^{n+1}$ comme fibré vectoriel ζ sur un point a. En composant $q : U_{n+1}/T \to P\mathbf{C}^n$ avec l'application constante $s : P\mathbf{C}^n \to a$, on obtient l'application constante $r : U_{n+1}/T \to a$. D'après la remarque 2) du §4, $s^*(c(\zeta))$ s'écrit $\prod_{i=1} (1-x_i)$. Donc $\prod (1-x_i) = 1$ dans $A = H^*(U_{n+1}/T; \mathbf{Z})$, puisque $c(\zeta) = 1$. D'où l'identité $\prod (X-x_i) = X^n$ dans l'anneau des polynômes en X à coefficients dans A. En substituant $1+x_1$ à X, on obtient $q^*(c(P\mathbf{C}^n)) = (1+x_1)^n$. On a $\xi = \xi' \oplus \xi''$, avec ξ' de rang 1, puisque ξ est associé à un $U_1 \times U_n$ — fibré principal par ι^J, et ξ' n'est autre que $r^*\zeta$, c'est-à-dire par construction γ. Donc $x_1 = q^*(t)$, où t engendre $H^2(P\mathbf{C}^n; \mathbf{Z})$. Comme q^* est injectif en vertu du principe de clivage, on en tire $c(P\mathbf{C}^n) = (1+t)^n$.

On trouvera de profondes applications de la proposition dans [4].

Appendice : le principe de clivage

Soit ξ un fibré vectoriel complexe de rang n sur un espace connexe X. Considérons l'espace $P(\xi)$ des droites contenues dans les fibres de ξ, ainsi que la projection $q : P(\xi) \to X$ induite par $\pi : E(\xi) \to X$.

Alors :

1) $q^*\xi$ contient le sous-fibré λ de rang 1, déterminé par les couples $(d, x) \in P(\xi) \times E(\xi)$ avec $x \in d$, de sorte que $q^*\xi \approx \lambda \oplus \xi'$;

2) $q^* : H^*(X) \to H^*(P(\xi))$ est injectif pour les coefficients entiers.

Pour prouver 2), considérons le produit tensoriel externe $\xi \mathbin{\hat{\otimes}} \eta$ sur $X \times P\mathbf{C}^k$, $k \geq n$, où η est le fibré vectoriel canonique de rang 1 sur $P\mathbf{C}^k$. Si $(\xi \mathbin{\hat{\otimes}} \eta)_0$ est le complémentaire de la section nulle, on a une application

$f : (\xi \hat{\otimes} \eta)_0 \to P(\xi)$ associant à $x \otimes z$ la droite passant par xz dans ξ. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\xi \hat{\otimes} \eta)_0 & \xrightarrow{f} & P(\xi) \\ {\scriptstyle \pi \times \pi'} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle q} \\ X \times \mathbf{PC}^k & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

est évidemment commutatif. On va montrer que $(p \circ (\pi \times \pi'))^*$ est injectif, ce qui impliquera 2) en vertu de la relation $f^* \circ q^* = (p \circ (\pi \times \pi'))$. Ecrivons la suite exacte de Gysin du fibré vectoriel $\xi \hat{\otimes} \eta$:

$$H^{i-2n}(X \times \mathbf{PC}^k) \xrightarrow[\chi(\xi \hat{\otimes} \eta)]{\text{mult. par}} H^i(X \times \mathbf{PC}^k) \xrightarrow{(\pi \times \pi')^*}$$
$$\longrightarrow H^i(\xi \hat{\otimes} \eta)_o \to H^{i-2n+1}(X \times \mathbf{PC}^k)$$

Comme $H^*(X \times \mathbf{PC}^k) \approx H^*(X)[t]/t^{k+1}$ en vertu de la formule de Künneth (c'est ici que les coefficients entiers jouent un rôle) et p^* applique $H^i(X)$ identiquement sur les constantes de degré total i dans $H^*(X)[t]/t^{k+1}$, on doit donc montrer que ces dernières ne sont pas divisibles par $\chi(\xi \hat{\otimes} \eta)$, en utilisant l'exactitude de la suite ci-dessus. Ecrivons $\chi(\xi \hat{\otimes} \eta) = a_n + a_{n-1}t + \ldots + a_0 t^n$ avec $a_i \in H^{2(n-i)}(X)$. Si x est un point de X, alors $\xi \hat{\otimes} \eta \mid x \times \mathbf{PC}^k \approx \mathbf{C}^n \hat{\otimes} \eta \approx \eta \oplus \ldots \oplus \eta$, par naturalité de la classe d'Euler, l'injection $i : x \times \mathbf{PC}^k \to X \times \mathbf{PC}^k$ vérifie $i^* \chi(\xi \hat{\otimes} \eta) = \chi(\eta \hat{\oplus} \oplus \ldots \oplus \eta) = t^n$, puisque $X(\eta) = t$ par définition. Mais $i^*(a_j) = 0$ pour $j > 0$ et $i^*(a_0) = a_0$, donc $a_0 = 1$. Cela implique la non divisibilité en question.

En faisant subir à ξ' la même opération qu'à ξ, et ainsi de suite, on obtient:

si $D(\xi)$ désigne l'espace des drapeaux de ξ, formé des suites ordonnées de n droites linéairement indépendantes dans les fibres de ξ, et $q : D(\xi) \to X$ la projection induite par celle de ξ, alors:

1) $q^*\xi \approx \underset{i=1}{\oplus} \lambda_i$ avec rang $\lambda_i = 1$;

2) $q^* : H^*(X) \to H^*(D(\xi))$ est injectif pour les coefficients entiers.

Remarques :

1) $D(\xi)$ est homotopiquement équivalent à l'espace $DU(\xi)$ des suites ordonnées de n droites orthogonales dans les fibres de ξ, relativement à un

produit scalaire quelconque dans ξ, paramétré par les fibres. Si P est le U_n-fibré principal formé par les bases orthonormées de ξ, alors $DU(\xi) = E(P)/T$, avec

$$T = \begin{pmatrix} U_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U_1 \end{pmatrix}.$$

2) Le principe de clivage reste valable pour les fibrés vectoriels réels, à condition de remplacer les coefficients entiers par Z_2. En effet, dans la démonstration ci-dessus, on doit remplacer $P\mathbf{C}^k$ par $P\mathbf{R}^k$ et la formule de Künneth ne reste juste que pour les coefficients Z_2. (Rappelons que $H^i(P\mathbf{R}^k; \mathbf{Z}) \approx Z_2$ pour i impair $<$ k).

RÉFÉRENCES

[1] Chevalley, C. *Theory of Lie groups.*

[2] Serre, J.-P. *Algèbres de Lie semi-simples complexes.*

[3] Husemoller, D. *Fibre bundles.*

[4] Borel, A. and F. Hirzebruch. « Characteristic classes and homogeneous spaces I, II, III ». *Am. J. of Math. 1958, 59, 60.*

[5] Steenrod, N. *The topology of fibre bundles.*

(Reçu le 18 mars 1969)

Serge Maumary
Institute for Advanced Studies
Princeton, New-Jersey
U. S. A.