5. Classe de Chern d'un espace homogène presque complexe

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1968)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

alors ξ_i n'est autre qu'un des fibrés vectoriels obtenus par le principe de clivage appliqué à ξ. Dans ce cas $\phi_i = p_i$ et $\alpha(p_i)$ est la fonction coordonnée x_i sur l'algèbre de Lie $\mathbf{R}^n$ de T.

3) On peut obtenir la formule ci-dessus sans utiliser la factorisation $q^*\xi = \oplus \xi_i$, mais seulement en utilisant 2) et la naturalité de la transgression. En effet, factorisons q en

$$E(P)/T \xrightarrow{r} E({}_\phi P)/T' \xrightarrow{s} X$$

où $r(xT) = (x \times 1)T'$ pour $x \in E(P)$ et $s(yT') = yU_n$ pour $y \in E({}_\phi P)$. Comme $E({}_\phi P/T')$ est homotopiquement équivalent à l'espace des drapeaux $D(\xi)$, on a

$$s^*(c(\xi)) = \prod (1 + \tau_{\substack{P \\ \phi\ T'}} \circ v(p_i))$$

d'après 2). Par naturalité de la transgression,

$$r^* \circ s^*(c(\xi)) = \prod (1 + \tau_{\substack{P \\ T}} \circ \phi^* \circ v(p_i)),$$

donc

$$q^*(c(\xi)) = \prod (1 + \tau_{\substack{P \\ T}} \circ v(\phi_i)) = \prod (1 + \tau_{\substack{P \\ T}}(\omega_i))$$

en posant $\phi_i = p_i \circ \phi$ et $\omega_i = v(\phi_i)$.

5. Classe de Chern d'un espace homogène presque complexe

En utilisant les notations du §1, soit G/U un espace homogène, dont le fibré tangent ξ est muni d'une structure complexe J invariante par G. On va chercher les composantes irréductibles de la représentation isotrope complexe ι^J restreinte à un tore T contenu dans U. On désignera par g et u les algèbres de Lie de G et U.

On va d'abord voir que ι^J est induite par $Ad : G \to Aut_R\, \mathfrak{g}$, cette dernière étant définie par $g \mapsto d\sigma_g(1)$, où σ_g est l'automorphisme intérieur de G déterminé par $g \in G$. En effet, si $\pi : G \to G/U$ est l'application canonique, on a $d\pi(1) \circ Ad\, u = d(\pi \circ \sigma_u)(1) = \iota(u) \circ d\pi(1)$ pour $u \in U$, puisque $\pi \circ \sigma_u(g) = ugU = u \circ \pi(g)$, en interprétant u comme translation à gauche de G/U. Donc $Ad\, u$, $u \in U$, est un automorphisme de la suite exacte $0 \to \mathfrak{u} \to \mathfrak{g} \xrightarrow{d\pi} (G/U)_0 \to 0$, induisant l'automorphisme $\iota(u)$ de $(G/U)_0$. Complexifions cette suite exacte. Alors:

1) La représentation $\iota^J \otimes 1$ de U dans $(G/U)_0 \otimes \mathbf{C}$ est équivalente à $\iota^{-J} \oplus \iota^{-J}$, où ι^J est la représentation conjuguée de ι^J. Cela résulte du fait que

si V est un espace vectoriel complexe de base (e_k), $V \underset{R}{\otimes} \mathbf{C}$ admet la $\mathbf{C}$-base $\varepsilon_k = e_k \otimes 1 - ie_k \otimes i$, $\varepsilon_K' = e_k \otimes 1 + ie_k \otimes i$. Etant donné un $\mathbf{C}$-automorphisme u de V par $u(e_k) = \sum_j u_{jk} e_j$, on a

$$u \otimes 1(\varepsilon_k) = \sum_j u_{jk} \varepsilon_j \quad et \quad u \otimes 1(\varepsilon_k') = \sum \overline{u_{jk}} \varepsilon_j' .$$

2) Si T est un tore maximal *dans* G, donc aussi dans U, alors $u \otimes \mathbf{C}$ admet un supplémentaire V dans $g \otimes \mathbf{C}$ invariant par $Ad \otimes 1 \mid T$. En effet, l'algèbre de Lie $t = \mathbf{R}^n$ de T devient une sous-algèbre de Cartan $t \otimes \mathbf{C}$ de $\mathfrak{u} \otimes \mathbf{C}$ et $\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}$ simultanément. Le théorème de structure $\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C} = (t \otimes \mathbf{C}) \oplus \oplus V_\alpha$, où α décrit l'ensemble $R(G)$ des racines de G, et $\mathfrak{u} \otimes \mathbf{C} = (t \otimes \mathbf{C}) \oplus \oplus V_\beta$, où β décrit $R(U)$, montre que l'espace vectoriel $V = \bigoplus_{\alpha \varepsilon R(G) - R(U)} V_\alpha$ est un supplémentaire de $\mathfrak{u} \otimes \mathbf{C}$, invariant par $ad \mid \mathfrak{t} \otimes \mathbf{C}$. Toute racine α est une forme $\mathbf{C}$-linéaire sur $\mathfrak{t} \otimes \mathbf{C}$ dont la restriction à $\mathfrak{t}$ est égale à $i\alpha_R$, α_R étant une forme $\mathbf{R}$-linéaire sur $\mathfrak{t} = \mathbf{R}^n$. Il existe une base (e_α) de V, $e_\alpha \in V_\alpha$, par rapport à laquelle la matrice de $ad\, x$, $x \in \mathbf{R}^n$, est

$$\begin{pmatrix} i\alpha_R(x) & & 0 \\ & -i\alpha_R(x) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

Comme $Ad(\exp ix)$ est la matrice exponentielle de cette dernière, on voit d'une part que V est invariant par $Ad(t) \otimes 1$, $A\ t = \exp ix \in T$, et d'autre part que les composantes irréductibles de $Ad \mid T$ sont données par les homomorphismes $t = \exp ix \mapsto \exp i\,\alpha_R(x)$ de T dans U_1.

D'après ce qui précède, si T est maximal dans G, les représentations $\iota^J \otimes \iota^J \mid T$ et $Ad \otimes 1 \mid T$ sont équivalentes. Donc les composantes irréductibles ι_α^J de ι^J sont celles de $Ad \otimes 1 \mid T$ prises seulement avec l'un des signes $+$ ou $-$. Elles correspondent à un ensemble de racines positives. La donnée de ces signes détermine d'ailleurs la structure complexe J de $(G/U)_0$, en vertu de $dim\ V_\alpha = 1$. En posant $\omega_\alpha^J = v(\iota_\alpha^J)$, on a la

Proposition: Soit G/U un espace homogène presque complexe, tel que U contienne un tore maximal T dans G. Alors, si $q : G/T \to G/U$ est l'application canonique, on a $q^*(c(G/U)) = \prod (1 + \tau_{G_T}(\omega_\alpha^J))$ où α parcourt les racines positives de $R(G) - R(U)$ et $c(G/U)$ est la classe totale de Chern du fibré tangent ξ à G/U, muni de la structure complexe invariante J.

Preuve : Il suffit de se rappeler que ξ^J est associé au U-fibré principal G_U par la représentation ι^J de U, et d'appliquer la formule trouvée au § 4.

Convention d'écriture : On écrit seulement $-\alpha_{\mathbf{R}}^J$ au lieu de $\tau_{G_T}(\omega_\alpha^J)$, de sorte que la formule précédente devient

$$q^*(c(G/U)) = \prod (1-\alpha_{\mathbf{R}}^J)\,.$$

Exemple :

Reprenons $P\mathbf{C}^n$ (cf. §1), pour lequel on sait que $\alpha_{\mathbf{R}}^J = x_\alpha - x_1$, $\alpha > 1$, donc $q^*(c(P\mathbf{C}^n)) = \prod\limits_{\alpha>1}(1+x_1-x_\alpha)$. Considérons $\mathbf{C}^{n+1}$ comme fibré vectoriel ζ sur un point a. En composant $q: U_{n+1}/T \to P\mathbf{C}^n$ avec l'application constante $s: P\mathbf{C}^n \to a$, on obtient l'application constante $r: U_{n+1}/T \to a$. D'après la remarque 2) du §4, $s^*(c(\zeta))$ s'écrit $\prod\limits_{i=1}(1-x_i)$. Donc $\prod(1-x_i) = 1$ dans $A = H^*(U_{n+1}/T; \mathbf{Z})$, puisque $c(\zeta) = 1$. D'où l'identité $\prod(X-x_i) = X^n$ dans l'anneau des polynômes en X à coefficients dans A. En substituant $1+x_1$ à X, on obtient $q^*(c(P\mathbf{C}^n)) = (1+x_1)^n$. On a $\xi = \xi' \oplus \xi''$, avec ξ' de rang 1, puisque ξ est associé à un $U_1 \times U_n$ — fibré principal par ι^J, et ξ' n'est autre que $r^*\zeta$, c'est-à-dire par construction γ. Donc $x_1 = q^*(t)$, où t engendre $H^2(P\mathbf{C}^n; \mathbf{Z})$. Comme q^* est injectif en vertu du principe de clivage, on en tire $c(P\mathbf{C}^n) = (1+t)^n$.

On trouvera de profondes applications de la proposition dans [4].

Appendice : le principe de clivage

Soit ξ un fibré vectoriel complexe de rang n sur un espace connexe X. Considérons l'espace $P(\xi)$ des droites contenues dans les fibres de ξ, ainsi que la projection $q: P(\xi) \to X$ induite par $\pi: E(\xi) \to X$.

Alors :

1) $q^*\xi$ contient le sous-fibré λ de rang 1, déterminé par les couples $(d, x) \in P(\xi) \times E(\xi)$ avec $x \in d$, de sorte que $q^*\xi \approx \lambda \oplus \xi'$;

2) $q^*: H^*(X) \to H^*(P(\xi))$ est injectif pour les coefficients entiers.

Pour prouver 2), considérons le produit tensoriel externe $\xi \mathbin{\hat{\otimes}} \eta$ sur $X \times P\mathbf{C}^k$, $k \geqq n$, où η est le fibré vectoriel canonique de rang 1 sur $P\mathbf{C}^k$. Si $(\xi \mathbin{\hat{\otimes}} \eta)_0$ est le complémentaire de la section nulle, on a une application