

II. DÉTERMINATION DU MINIMUM DE CERTAINES FONCTIONS CONVEXES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

L'ensemble $f(U) \cup L(F)$ étant fermé, il contient la valeur $\sup f$; donc on ne modifie pas le $\sup (f(U) \cup L(F))$ en retranchant de cet ensemble toute valeur inférieure à $\sup f$. Il en est ainsi en particulier des valeurs $f(x)$ pour $x \in E, x \notin E_1$, puisque $f(x) = \sup f, x \in E \Rightarrow x \in E_1$, et aussi des valeurs inférieures à $\sup L(F)$, d'où le résultat.

Les formules (I. 1) permettent souvent le calcul des $\sup f, \inf f$, sans aucune hypothèse concernant les dérivées secondes. Leur extension au cas où U est un ouvert d'une variété C^1 est immédiate, mais, pour éviter les complications, f doit alors être supposée différentiable en tout point de E ; on peut d'ailleurs les compléter d'une façon évidente lorsque f présente des discontinuités dans E_0 .

II. DÉTERMINATION DU MINIMUM DE CERTAINES FONCTIONS CONVEXES

Dans l'espace R^n , muni de la distance euclidienne, on se donne q points a_1, a_2, \dots, a_q tels que R^n soit le plus petit espace linéaire qui les contient. Nous allons considérer des fonctions de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^q \mu_i |x - a_i|^{v_i}$$

où μ_i, v_i sont des nombres réels tels que $\mu_i > 0, v_i \geq 1, (i = 1, 2, \dots, q)$. Dans le cas trivial où $n = 1, v_1 = v_2 = \dots = v_q = 1$, on a

$$\inf f = \inf \{ f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_q) \},$$

parce que le graphe de f est alors une ligne brisée convexe de sommets $(a_i, f(a_i)), (i = 1, 2, \dots, q)$; si cette ligne possède un côté parallèle à l'axe des x , la fonction f n'est pas strictement convexe.

PROPOSITION. *Le cas trivial ci-dessus étant écarté, f est toujours strictement convexe et l'équation $df = 0$ admet une ou n'admet aucune solution.*

Si $df = 0$ pour $x = x_0$, le point x_0 appartient à l'intérieur $\overset{\circ}{T}$ de l'enveloppe convexe T des a_1, a_2, \dots, a_q et fournit le minimum. Si l'équation $df = 0$ n'a pas de solution, on aura $\inf f = \inf \{ f(a_i) \mid v_i = 1 \}$, ce qui montre en particulier que la solution x_0 existe quand $v_i > 1$ pour $i = 1, 2, \dots, q$.

Démonstration. La fonction $|x|^v$, où $v \geq 1$, étant convexe, il en est de même des $\mu_i |x - a_i|^{v_i}$ et de leur somme $f(x)$. La fonction $|x|^v$, où $v > 1$, étant strictement convexe, il s'ensuit la même propriété pour f lorsqu'il existe un indice tel que $v_i > 1$. Lorsque $v_1 = v_2 = \dots = v_q = 1$, alors $n \geq 2$; donc, $\forall x \in R^n, \forall x' \in R^n$, on aura $|\alpha x + (1 - \alpha)x' - a_i| =$

$= | \alpha (x - a_i) + (1 - \alpha) (x' - a_i) | < \alpha | x - a_i | + (1 - \alpha) | x' - a_i |$,
 ($0 < \alpha < 1$), pour un indice au moins, d'où le résultat dans ce cas aussi.

Comme f est strictement convexe, $df = 0$ admet au plus une solution.

La relation

$$df = \left(\sum_{i=1}^q \mu_i v_i |x - a_i|^{v_i - 2} (x - a_i) \right) dx$$

entraîne $E_0 = \{ a_i \mid v_i = 1 \}$. Si $df = 0$ pour $x = x_0$, on a $x_0 \notin \{ a_i \mid v_i = 1 \}$,
 $E_1 = \{ x_0 \}$, d'où, d'après (I. 1), $\inf f = \inf (\{ f(a_i) \mid v_i = 1 \} \cup \{ f(x_0) \})$;
 considérant la restriction de f à la ligne droite joignant x_0 à un point a_i tel
 que $v_i = 1$, on constate que $f(x_0) < f(a_i)$, d'où $\inf f = f(x_0)$. Si $df(x) \neq 0$,
 $\forall x \notin \{ a_i \mid v_i = 1 \}$, on a $E_1 = \emptyset$ et $\inf f = \inf f(E_0) = \inf \{ f(a_i) \mid v_i = 1 \}$.

Si $df = 0$ pour $x = x_0$ et si $x_0 \notin \overset{\circ}{T}$, il existera un $(n - 1)$ - plan H
 tel que $x_0 \in H$, $H \cap \overset{\circ}{T} = \emptyset$. Soit e le vecteur unitaire normal à H définissant
 le demi-espace défini par H contenant $\overset{\circ}{T}$. Alors la dérivée de f en x_0 dans
 la direction de e ,

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \sum_{i=1}^q \mu_i v_i |x_0 - a_i|^{v_i - 2} (x_0 - a_i) e,$$

sera négative non nulle, ce qui est impossible; donc $x_0 \in \overset{\circ}{T}$.

COROLLAIRE. *Lorsque $\inf \{ f(a_i) \mid v_i = 1 \}$ se réalise en deux points
 de $E_0 = \{ a_i \mid v_i = 1 \}$, alors $df = 0$ admet une solution x_0 . Lorsque
 $\inf \{ f(a_i) \mid v_i = 1 \}$ se réalise en un seul point a_k , alors la solution x_0 de
 $df = 0$ existe si, et seulement si, dans une boule de centre a_k et de rayon
 arbitrairement petit, il existe un point x tel que $f(x) < f(a_k)$.*

Quand la solution x_0 existe, on peut la déterminer, par rapport à des
 coordonnées rectangulaires (x^1, \dots, x^n) , en limitant ses opérations dans le
 domaine $\overset{\circ}{T}$. Posant

$$f_s = \frac{\partial f}{\partial x^s}, \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

on voit que l'équation $f_1 = 0$ admet une solution $x^1 = \varphi^1(x^2, \dots, x^n)$
 unique et telle que $(\varphi^1(x^2, \dots, x^n), x^2, \dots, x^n) \notin \{ a_i \mid v_i = 1 \}$; l'équa-
 tion $f_2(\varphi^1(x^2, \dots, x^n), x^2, \dots, x^n) = 0$ admet aussi une solution unique
 $x^2 = \varphi^2(x^3, \dots, x^n)$ et il en est de même de $f_3(\varphi^1, \varphi^2, x^3, \dots, x^n) = 0$, etc...
 L'équation $f_n(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^{n-1}, x^n) = 0$ fournit finalement la coordonnée x_0^n
 et, remplaçant successivement dans $\varphi^{n-1}, \dots, \varphi^2, \varphi^1$, on obtient aussi les
 autres coordonnées $x_0^{n-1}, \dots, x_0^2, x_0^1$ de x_0 .

Suivant les données concrètes du problème, la recherche de x_0 peut être simplifiée, notamment si $v_1 = v_2 = \dots = v_q = 1$, cas dans lequel $df = 0$ s'écrit

$$\sum_1^q \mu_i v_i = 0 \quad \text{où} \quad v_i = - \frac{x - a_i}{|x - a_i|}.$$

Lorsque, par exemple, $n = 2, q = 3, v_1 = v_2 = v_3 = 1$, la condition

$$\sum_1^3 \mu_i v_i = 0$$

ne peut être vraie que si $\mu_1 + \mu_2 > \mu_3, |\mu_1 - \mu_2| < \mu_3$; donc quand ces relations ne sont pas remplies, on a $\inf f = \inf \{f(a_1), f(a_2), f(a_3)\}$. Si elles sont remplies, on considère les angles $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3$ d'un triangle $A_1 A_2 A_3$ tel que $|\overrightarrow{A_2 A_3}| = \mu_1, |\overrightarrow{A_3 A_1}| = \mu_2, |\overrightarrow{A_1 A_2}| = \mu_3$; alors, si les angles $\pi - \hat{A}_1, \pi - \hat{A}_2, \pi - \hat{A}_3$ sont supérieurs respectivement aux angles $\sphericalangle(a_2 a_1 a_3), \sphericalangle(a_3 a_2 a_1), \sphericalangle(a_1 a_3 a_2)$, le point x_0 existe et, compte tenu des $\sphericalangle(a_2 x_0 a_3) = \pi - \hat{A}_1, \sphericalangle(a_3 x_0 a_1) = \pi - \hat{A}_2, \sphericalangle(a_1 x_0 a_2) = \pi - \hat{A}_3$, se détermine facilement; en cas contraire, on a encore $\inf f = \inf \{f(a_1), f(a_2), f(a_3)\}$.

III. SUR LES RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN SIMPLEXE

Etant donné un simplexe euclidien $A_1 A_2 \dots A_{n+1}$, on désigne par $\overrightarrow{x_{ij}}$ le vecteur $\overrightarrow{A_i A_j}$, ce qui entraîne $|\overrightarrow{x_{ij}}| = |\overrightarrow{x_{ji}}| = x_{ij} = x_{ji}, (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n + 1)$, et par ω le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{x_{i1}}, \overrightarrow{x_{i2}}, \dots, \overrightarrow{x_{i,i-1}}, \overrightarrow{x_{i,i+1}}, \dots, \overrightarrow{x_{i,n+1}}$, issus de A_i . Ce volume, qui ne dépend pas du sommet choisi, permet d'associer à chaque sommet A_i un angle ϕ_i défini par les conditions suivantes:

$$a) \quad \sin \phi_i = \tau_i = \frac{\omega}{x_{i1} x_{i2} \dots x_{i,i-1} x_{i,i+1} \dots x_{i,n+1}};$$

b) $0 < \phi_i < \frac{\pi}{2}$, lorsque parmi les angles que font les vecteurs

$\overrightarrow{x_{i1}}, \overrightarrow{x_{i2}}, \dots, \overrightarrow{x_{i,i-1}}, \overrightarrow{x_{i,i+1}}, \dots, \overrightarrow{x_{i,n+1}}$, pris deux à deux, il y en

a au moins un inférieur à $\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \leq \phi_i < \pi$ en cas contraire.