INTRODUCTION AUX POLYNOMES D'UN NŒUD

Autor(en): **de Rham, Georges**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-41542

INTRODUCTION AUX POLYNOMES D'UN NŒUD

Par Georges DE RHAM

1. Considérons un nœud, c'est-à-dire une courbe fermée simple C dans l'espace $\mathbf{R}^3$, dont la projection C' dans le plan $\mathbf{R}^2$ n'a pas d'autres points singuliers que n points doubles à tangentes distinctes. Supposons que C et $\mathbf{R}^3$ sont orientés. Pour fixer les idées, admettons que C coïncide avec sa projection C' sauf au voisinage des points doubles où l'un des arcs passe dessous. Les points de C situés sous les points doubles partagent C en n arcs $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Chaque point double est l'extrémité de la projection C_i' d'un arc C_i et l'origine de C_{i+1}' (C_{n+1}' devant être remplacé par C_1'), et il est traversé par un autre arc $C_{j(i)}'$. Convenons de poser $\varepsilon(i) = 1$ si en allant de C_i' à C_{i+1}' on traverse $C_{j(i)}'$ de gauche à droite et $\varepsilon(i) = -1$ dans le cas contraire.

Le groupe fondamental de $\mathbf{R}^3 - C$, qu'on appelle le groupe du nœud, peut être engendré par n éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$, qui satisfont aux n relations

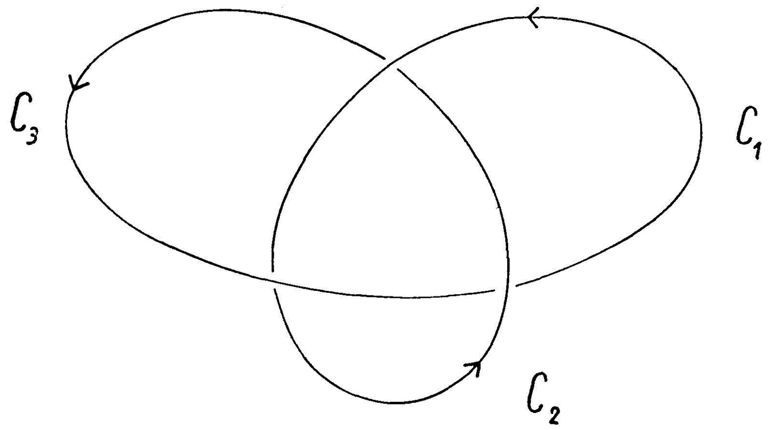
$$(1) \quad \begin{cases} a_i\, a_{j(i)} = a_{j(i)}\, a_{i+1} & \text{si} \quad \varepsilon(i) = 1 \\ a_{i+1}\, a_{j(i)} = a_{j(i)}\, a_i & \text{si} \quad \varepsilon(i) = -1 \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En choisissant pour définir le groupe un point base B situé au-dessus du plan $\mathbf{R}^2$, a_i désigne la classe d'homotopie d'un chemin qui, partant de B, traverse $\mathbf{R}^2$ à gauche de C_i, passe au-dessous de C_i, et retraverse $\mathbf{R}^2$ à droite de C_i pour revenir en B, sans avoir passé dessous aucun autre arc C_k. A chaque point double correspond une relation (1), dans laquelle chaque membre est la classe d'homotopie d'un chemin qui, partant de B, traverse $\mathbf{R}^2$ à gauche des arcs de C' passant par ce point double, passe sous les arcs correspondant de C et retraverse $\mathbf{R}^2$ à droite pour ensuite revenir en B.

Par exemple, pour le nœud de trêfle représenté sur la figure, on a $\varepsilon(1) = \varepsilon(2) = \varepsilon(3) = 1$, $j(1) = 3$, $j(2) = 1$, $j(3) = 2$ et aux points doubles correspondent les relations

$$a_2\, a_1 = a_1\, a_3\,, \qquad a_3\, a_2 = a_2\, a_1\,, \qquad a_1\, a_3 = a_3\, a_2\,.$$

On démontre que ces éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ engendrent le groupe G du nœud, que toutes les relations qu'ils vérifient sont une conséquence des relations (1) et que l'une quelconque de ces relations est une conséquence des $n-1$ autres (voir par exemple [1]). Partant de là, nous allons définir certains invariants aisément calculables qui se déduisent du groupe G: *les polynômes d'Alexander* ou polynômes du nœud.



2. Nous y serons conduits en cherchant les représentations de G dans le groupe $\mathscr{L}$ des transformations linéaires d'une variable complexe (ou groupe des similitudes du plan). Etant donnés deux nombres complexes x et y, $x \neq 0$, désignons par (x, y) la transformation qui change z en $z' = xz + y$. On a les relations

$$(x, y)^{-1} = (x^{-1}, -x^{-1}\, y)\,, \qquad (x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1\, x_2, x_1\, y_2 + y_1)\,.$$

Le groupe dérivé $\mathscr{L}'$ ou groupe des commutateurs de $\mathscr{L}$ est le groupe des translations $(1, y)$, le groupe quotient $\mathscr{L}/\mathscr{L}'$ est isomorphe au groupe multiplicatif C^* des nombres complexes $\neq 0$, l'homomorphisme canonique de $\mathscr{L}$ sur C^* envoyant (x, y) sur x.

Soit h: $G \to \mathscr{L}$ un homomorphisme, $h(a_i) = (x_i, y_i)$. Les relations (1) entraînent immédiatement $x_i = x_{i+1}$, de sorte qu'on peut poser $h(a_i) = (x, y_i)$ et ces relations donnent

$$(2) \quad \begin{cases} (x-1)\, y_{j(i)} - x y_{i+1} + y_i = 0 & \text{si} \quad \varepsilon(i) = 1 \\ (x-1)\, y_{j(i)} - x y_i + y_{i+1} = 0 & \text{si} \quad \varepsilon(i) = -1 \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

où naturellement, pour $i = n$, y_{n+1} doit être remplacé par y_1.

Ce système d'équations linéaires en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ représente la condition nécessaire et suffisante pour que h soit un homomorphisme.

Quel que soit x, il admet la solution $y_i = c$, constante quelconque indépendante de i, et pour $x = 1$ il n'y en a pas d'autres. Nous pouvons éliminer cette solution en imposant $y_n = 0$, ce qui revient à exiger que l'origine $z = 0$ soit le point fixe de la transformation $h(a_n)$; si $x \neq 1$, la représentation est toujours conjuguée dans $\mathscr{L}$ à une représentation ayant cette propriété (on peut prendre le point fixe de $h(a_n)$ comme origine !). Nous pouvons aussi supprimer la dernière équation (2), relative à $i = n$, qui est une conséquence des autres, puisque la dernière relation (1) est une conséquence des autres. Il reste alors un système de $(n-1)$ équations linéaires homogènes en $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, dont les coefficients dépendent de x et forment une matrice M.

Si ρ est un nombre complexe $\neq 0$, les représentations h pour lesquelles $h(a_n) = \rho$ sont représentées par les vecteurs $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ de $\mathbf{C}^{n-1}$ qui satisfont à ce système où x est remplacé par ρ. Elles forment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{n-1}$, de dimension $n-1-r(\rho)$, $r(\rho)$ étant le rang de la matrice M pour $x = \rho$.

Cela nous amène à considérer le plus grand commun diviseur $\Delta_k(x)$ des mineurs d'ordre $n-k$ de la matrice M. Ce sont justement les polynômes d'Alexander, ou polynômes du nœud. Et nous avons obtenu la proposition suivante:

Les représentations h de G dans $\mathscr{L}$ pour lesquelles $\mathrm{h}(\mathrm{a}_n) = (\rho, 0)$ *forment un espace vectoriel complexe de dimension égale au plus grand entier* k *tel que $\Delta_k(\rho) = 0$.*

Chacun de ces polynômes est divisible par le suivant. Le premier, le plus intéressant, n'est autre que le déterminant de la matrice M. Notre système d'équation se réduisant pour $x = 1$ à

$$\pm(y_i - y_{i+1}) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2), \qquad \pm y_{n-1} = 0$$

on voit que $\Delta_1(1) = \pm 1$. Par suite, $\Delta_k(1) = \pm 1$ pour tout $k \leq n-1$. Nous conviendrons de poser, pour $k \geq n$, par définition, $\Delta_k(x) = 1$.

La proposition ci-dessus montre que les racines de ces polynômes sont des invariants du nœud, liés à son groupe G.

D'après la théorie des matrices sur un anneau principal, la matrice M est équivalente, sur l'anneau $Q(x)$ des polynômes en x à coefficients rationnels, à une matrice diagonale, dans laquelle chacun des éléments α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de la diagonale principale divise le suivant (voir par exemple N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. VII, pp. 94-95). On peut obtenir que chaque α_i soit un polynôme en x à coefficients entiers premiers entre eux dans leur ensemble; ils sont alors déterminés au signe près, et l'on a $\Delta_k = \pm \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-k}$. Si α_{n-s} est de degré >0 et $\alpha_i = 1$ pour $i < n-s$, en posant

$$\beta_t = \alpha_{n-t}\,\alpha_{n-t-1}^{-1} \quad (t = 1, 2, \dots, s)\,,$$

on a

$$\alpha_{n-s} = \beta_s\,, \quad \alpha_{n-s+1} = \beta_{s-1}\,\beta_s\,, \dots, \alpha_{n-1} = \beta_1\,\beta_2 \dots \beta_s$$

et par suite, au signe près,

$$\Delta_1 = \beta_1\,\beta_2^2 \dots \beta_s^s\,, \quad \Delta_2 = \beta_2\,\beta_3^2 \dots \beta_s^{s-1}\,, \dots, \Delta_s = \beta_s$$

et $\Delta_k = 1$ pour $k > s$. Les Δ_k sont ainsi déterminés par les polynômes β_s.

Pour s'assurer que non seulement les racines des Δ_k sont des invariants du nœud, mais aussi ces polynômes eux-mêmes, il faudrait caractériser l'ordre de multiplicité de ces racines. Si les racines de $\alpha_{n-1} = \beta_1\,\beta_2 \dots \beta_s$ sont toutes simples, les relations ci-dessus font connaître ces ordres de multiplicité, et la connaissance des Δ_k n'apporte rien de plus que celle de leurs racines. Cette circonstance se présente dans les exemples traités dans le livre de Richard H. CROWELL et Ralph H. FOX ([1], pp. 124-132).

Mais nous allons reprendre la question d'un point de vue algébrique plus général et montrer que non seulement les polynômes Δ_k, mais les idéaux J_k de l'anneau $\mathbf{Z}\,[x]$ engendrés par les mineurs d'ordre $n-k$ de la matrice M sont des invariants liés au groupe G.

3. Considérons plus généralement un groupe G tel que G/G' soit cyclique infini, comme pour le groupe d'un nœud, et supposons que l'on ait choisi un générateur x de G/G' (l'autre générateur étant x^{-1}). Soit G'' le groupe dérivé de G' et $\Gamma = G/G''$. Son groupe dérivé $\Gamma' = G'/G''$ est abélien et comme $\Gamma/\Gamma' \simeq G/G'$, nous identifierons Γ/Γ' avec G/G', de sorte que x sera aussi bien un générateur de Γ/Γ'. Chaque élément γ de Γ induit un automorphisme de Γ', qui change $c \in \Gamma'$ en $c^\gamma = \gamma c \gamma^{-1}$. Cet automorphisme ne dépend que de la classe de γ (mod Γ'), c'est-à-dire de l'image de γ dans Γ/Γ', qui est une puissance x^k de x; cela parce que Γ' est abélien. En utilisant pour Γ' la notation additive, nous désignerons c^γ par $x^k\, c$. Ainsi $G/G' = \Gamma/\Gamma'$ opère sur Γ' et Γ' se présente comme un module sur l'anneau $A = \mathbf{Z}\,[\Gamma/\Gamma']$. Cet anneau est formé des polynômes en x et x^{-1} à coefficients entiers.

Revenons un instant aux représentations h de G dans $\mathscr{L}$. Comme $\mathscr{L}'$ est abélien, $\mathscr{L}''$ est le groupe trivial (réduit à l'élément neutre) et par suite le noyau de tout homomorphisme de G dans $\mathscr{L}$ contient G'' et les représentations de G dans $\mathscr{L}$ se ramènent ainsi aux représentations de Γ. Elles ne peuvent donc nous renseigner que sur la structure de Γ. Les racines des polynômes Δ_k sont donc des invariants de Γ. Mais en étudiant directement le A-module Γ', nous allons voir que non seulement les racines, mais ces polynômes eux-mêmes sont des invariants de Γ.

Supposons maintenant que G soit défini par un nombre fini de générateurs $a_1, a_2, ..., a_n$ et un nombre fini de relations. Nous pouvons aussi supposer que l'image de a_n dans G/G' est précisément le générateur x, car on pourra toujours satisfaire à cette condition en ajoutant un générateur et une relation. Soit x^{n_i} l'image de a_i dans G/G'; alors $b_i = a_i a_n^{-n_i}$ est dans G', et $b_1, b_2, ..., b_{n-1}, a_n$ est un nouveau système de générateurs de G. Les b_i et tous leurs transformés par toutes les puissances de a_n engendrent G' et les relations de définition de G peuvent s'écrire avec ces éléments seulement. En remplaçant ces éléments par leurs images dans Γ', désignant par c_i l'image de b_i et, passant à la notation additive, par $x^k c_i$ celle de $a_n^k b_i a_n^{-k}$, on déduit de ces relations un système de la forme:

$$\sum_{j=1}^{n-1} p_{ij} c_j = 0 \qquad (i = 1, 2, ...) \tag{3}$$

où les p_{ij} sont des éléments de l'anneau $A = \mathbf{Z}[\Gamma/\Gamma'] = \mathbf{Z}[x, x^{-1}]$. Les c_i forment une base du A-module Γ' et les relations (3) le définissent complètement.

En multipliant chaque relation (3) par une puissance convenable de x, on peut obtenir que les p_{ij} soient des polynômes en x, ceux d'une même ligne de la matrice ne s'annulant pas tous pour $x = 0$. En remplaçant c_j par $x^{m_j} c_j$ et choisissant convenablement m_j, on pourra obtenir aussi que ceux d'une même colonne ne s'annulent pas tous pour $x = 0$.

Dans le cas où G est le groupe d'un nœud défini comme plus haut, cette matrice $P = \| p_{ij} \|$ n'est pas autre chose que la matrice M, comme on le vérifie facilement. Soit $m-1$ l'ordre maximum des mineurs de P non identiquement nuls, J_k l'idéal engendré par les mineurs d'ordre $m-k$ et $\Delta_k(x)$ leur plus grand commun diviseur. Dans le cas de la matrice M, on a $m = n$ et $\Delta_k(x)$ est bien le k-ième polynôme d'Alexander. Or nous allons voir que, dans le cas général, les polynômes $\Delta_k(x)$ et aussi les idéaux J_k sont des invariants du A-module Γ'.

4. Considérons plus généralement un anneau commutatif quelconque A avec élément unité et un A-module de type fini $\mathcal{M}$. Nous allons définir une suite d'idéaux de A associée à $\mathcal{M}$, appelée la *chaîne des idéaux élémentaires de* $\mathcal{M}$ [1]).

[1]) Comme me signale D. Amiguet, cette question fait l'objet d'un exercice de Bourbaki (*Algèbre commutative*, chap. 7, p. 106) qui nomme ces idéaux *déterminantiels*.

Soit $S = (a_1, a_2, ..., a_n)$ un système de générateurs de $\mathcal{M}$, $\mathcal{U}$ un A-module libre de rang n de base $[u_1, u_2, ..., u_n]$, h l'homomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{M}$ tel que $h(u_i) = a_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ et V le noyau de h, en sorte que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{U}/V$.

Les composantes des éléments v de V relativement à la base $[u_1, u_2, ..., u_n]$, c'est-à-dire les coefficients x_i des u_i dans l'expression $v = \sum x_i u_i$, engendrent un idéal qui ne dépend pas du choix de la base de $\mathcal{U}$, car il est engendré par les valeurs sur les éléments de V des formes linéaires sur $\mathcal{U}$; désignons-le par $a(\mathcal{U}, V)$.

La puissance extérieure p-ième de $\mathcal{U}$ est un A-module libre $\mathcal{U}_p$ de rang $\binom{n}{p}$, ayant pour base les $\binom{n}{p}$ produits extérieurs $u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge ... \wedge u_{i_p}$ $(1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n)$. Les produits extérieurs de p éléments de V engendrent un sous-module V_p de $\mathcal{U}_p$ et leurs composantes engendrent l'idéal $a(\mathcal{U}_p, V_p)$. Il est clair que $a(\mathcal{U}_p, V_p) \supset a(\mathcal{U}_{p+1}, V_{p+1})$, car si $v \in V$ et $w \in V_p$, les composantes de $v \wedge w$ sont des combinaisons linéaires de celles de w.

Ces idéaux étant déterminés à partir du système S, posons $a_p(S) = a(\mathcal{U}_p, V_p)$ pour $1 \leq p \leq n$, et de plus $a_p(S) = (1)$ si $p \leq 0$ et $a_p(S) = (0)$ si $p > n$.

Considérons maintenant le système de générateurs $S' = (a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1})$ obtenu en adjoignant à S l'élément $a_{n+1} = \sum_1^n y_i a_i$ $(y_i \in A)$ et montrons que l'on a $a_{p+1}(S') = a_p(S)$.

Soit $\mathcal{U}'$ le A-module libre de rang $n+1$, ayant pour base $[u_1, ..., u_n, u_{n+1}]$, en sorte que $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$. L'homomorphisme h s'étend, en posant $h(u_{n+1}) = a_{n+1}$, en un homomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{M}$. En remplaçant u_{n+1} par $u = u_{n+1} - \sum_1^n y_i u_i$, on a une autre base $[u_1, ..., u_n, u]$ de $\mathcal{U}'$ et $h(u) = 0$, d'où résulte que le noyau V' de l'homomorphisme h de $\mathcal{U}'$ est engendré par u et V.

Soit encore $\mathcal{U}'_p$ la puissance extérieure p-ième de $\mathcal{U}'$ et V'_p le sous-module de $\mathcal{U}'_p$ engendré par les produits extérieurs de p éléments de V. Tout élément ξ de $\mathcal{U}'_{p+1}$ peut se mettre d'une manière unique sous la forme

$$\xi = \alpha \wedge u + \beta \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathcal{U}_p \quad \text{et} \quad \beta \in \mathcal{U}_{p+1}\,.$$

Les composantes de ξ sont donc les composantes de α et celles de β. Et chaque couple $\alpha \in \mathcal{U}_p$, $\beta \in \mathcal{U}_{p+1}$ définit un $\xi \in \mathcal{U}'_{p+1}$. Pour que $\xi \in V'_{p+1}$, il faut et il suffit que $\alpha \in V_p$ et $\beta \in V_{p+1}$. Par suite, l'idéal $a(\mathcal{U}'_{p+1}, V'_{p+1})$ engendré par les composantes des $\xi \in V'_{p+1}$ est identique à l'idéal $a(\mathcal{U}_p, V_p)$ engendré par les composantes des $\alpha \in V_p$ (les composantes des $\beta \in V_{p+1}$ appartenant aussi à cet idéal puisque $a(\mathcal{U}_{p+1}, V_{p+1}) \subset a(\mathcal{U}_p, V_p)$).

Nous avons ainsi prouvé que $a_{p+1}(S') = a_p(S)$. Cela vaut aussi pour $p = 0$, car $u \in V'$ ayant une composante égale à 1, $a_1(S') = (1) = a_0(S)$.

Soit alors $\bar{S}$ un autre système quelconque de générateurs, en nombre m. La proposition établie entraîne $a_{p+m}(S \cup \bar{S}) = a_p(S)$ et $a_{p+n}(S \cup \bar{S}) = a_p(\bar{S})$, d'où $a_p(S) = a_{p+m-n}(\bar{S})$. Nous voyons qu'en changeant le système de générateurs, on obtient la même suite d'idéaux qui est simplement décalée si les nombres de générateurs ne sont pas égaux.

Soit q l'indice du premier idéal $a_p(S)$ égal à (0), de sorte que $a_q(S) = (0)$ et $a_{q-1}(S) \neq 0$. Posons, pour $k \geq 1$, $J_k = a_{q-k}(S)$. La suite croissante d'idéaux de A

$$J_1 \subset J_2 \subset \ldots \subset J_k \subset J_{k+1} \subset \ldots \subset (1)$$

qui se termine par (1) pour un $k \leq n$ ne dépend que du A-module $\mathcal{M}$: c'est *la chaîne des idéaux élémentaires de* $\mathcal{M}$.

Pour déterminer ces idéaux, on prend un ensemble de générateurs v_j ($j = 1, 2, \ldots, m$) de V, on les représente à l'aide de la base $[u_1, \ldots, u_n]$ de $\mathcal{U}$,

$$v_j = \sum_{k=1}^{u} y_{jk} u_k$$

et l'on considère la matrice des coefficients $\| y_{jk} \|$. Il résulte alors des règles de la multiplication extérieure que $a_p(\mathcal{U}, V)$ est engendré par les mineurs d'ordre p de cette matrice.

5. Il résulte de là que les idéaux J_k définis à la fin du n⁰ 4 sont précisément les idéaux élémentaires du A-module $\Gamma' = G'/G''$, A étant l'anneau $\mathbf{Z}[G/G'] = \mathbf{Z}[x, x^{-1}]$. Ainsi, *à tout groupe* G *tel que* G/G′ *est cyclique infini, est associée une chaîne d'idéaux élémentaires de cet anneau* A.

Les unités de A sont les monômes $\pm x^k$ et tout élément $\neq 0$ de A est associé à un polynôme en x qui ne s'annule pas pour $x = 0$, bien déterminé au signe près. On sait que ces polynômes se décomposent d'une manière unique en facteurs irréductibles, déterminés au signe près; les polynômes irréductibles de degré zéro étant les nombres premiers. Par suite, tout ensemble d'éléments de A, en particulier tout idéal, a un plus grand commun diviseur. Ainsi, à la chaîne des idéaux élémentaires J_k est associée une suite de polynômes Δ_k, Δ_k étant le p.g.c.d. des éléments de J_k.

Dans le cas du groupe G d'un nœud, J_1 est l'idéal principal engendré par le déterminant Δ_1 de la matrice M définie au n⁰ 2, et les Δ_k sont les polynômes d'Alexander dont l'invariance est ainsi complètement établie. Mais nous avons aussi prouvé que l'idéal J_k engendré par les mineurs d'ordre $n-k$ de M sont des invariants. Et cela est important: il existe en effet des nœuds dont les groupes ont les mêmes polynômes Δ_k mais pas les mêmes idéaux J_k. Voir un exemple dans [1], pp. 128-130.

Il faut remarquer que la chaîne des idéaux élémentaires associée à un groupe G n'est bien déterminée que si l'on a choisi un générateur x de G/G'. En remplaçant x par l'autre générateur x^{-1}, ces idéaux sont changés en leurs conjugués par l'automorphisme $x \to x^{-1}$ de A, et chaque polynôme Δ_k est changé en le polynôme réciproque. Dans le cas du groupe d'un nœud, nous avons lié un générateur x à des orientations de C et de $\mathbf{R}^3$. Mais il faut ici mentionner un théorème profond de Seifert: les idéaux associés au groupe d'un nœud sont invariants par la conjugaison $x \to x^{-1}$, les polynômes Δ_k sont réciproques [2]. Une démonstration particulièrement remarquable de ce théorème est celle de Milnor [3] (voir aussi [4]). Seifert a donné[2] un exemple d'un nœud dont le groupe G est tel que $G' = G''$, pour lequel Γ' est donc trivial, sans que G' le soit. La considération du A-module Γ' ne permet pas de distinguer un tel groupe du groupe cyclique infini. Seifert a alors recours à des représentations dans le groupe des déplacements du plan non-euclidien.

RÉFÉRENCES

[1] Crowell, R. H. and R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory.* Ginn and Company, 1963.

[2] Seifert, H., Ueber das Geschlecht von Knoten. *Math. Ann.*, vol. 110 (1934), pp. 571-592.

[3] Milnor, J., A duality theorem for Reidemeister torsion. *Ann. of Math*, 76 (1962), pp. 136-147.

[4] de Rham, G., S. Maumary et M. A. Kervaire, *Torsion et type simple d'homotopie.* Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., Nr. 48.

[5] Reidemeister, K., Knotentheorie, dans *Ergebnisse der Math.*, vol. 1, n° 1 (1932). Reprint Chelsea, 1948, New-York.

[6] Neuwirth, L. P., Knot Groups. *Annals of Math. Studies*, Nr. 56. Princeton Univ. Press, 1965.

G. de Rham
Institut de Mathématiques
Université de Genève

(Reçu le 13 février 1968)