QU'EST-CE QU'UNE QUADRIQUE ?

Autor(en): **Samuel, Pierre**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-41536>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

QU'EST-CE QU'UNE QUADRIQUE ?

Par Pierre SAMUEL (Paris)

Il est d'usage de définir une quadrique comme un *ensemble* de points d'un espace projectif, réel ou complexe. Mais, sauf dans le cas complexe, cet ensemble de points ne détermine pas *l'équation* de la quadrique (à un facteur près, bien entendu): par exemple cet ensemble peut être vide, ou ne comporter que des points singuliers (équations $x^2 + y^2 = 0$ et $x^2 + 3y^2 = 0$ dans l'espace projectif réel). Il est donc incorrect de parler alors de *l'équation* de la quadrique; même N. Bourbaki, dans les exercices de son chapitre IX d'Algèbre, a commis cette erreur.

Cependant, dès que l'ensemble des points d'une quadrique contient un point *simple*, cet ensemble de points détermine l'équation à un facteur près. Pour plus de commodité nous remonterons à un espace vectoriel; nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. Soient K un corps de caractéristique $\neq 2$, E un espace vectoriel sur K , B et B' deux formes bilinéaires symétriques sur E , Q et Q' les formes quadratiques associées (i.e $Q(x) = B(x, x)$). On suppose que les relations $Q(x) = 0$ et $Q'(x) = 0$ sont équivalentes, et qu'on dispose d'un point x_0 de E tel que $Q(x_0) = 0$ et qu'il existe $y \in E$ avec $B(x_0, y) \neq 0$ (autement dit x_0 n'est pas dans le noyau de B). Alors les formes B et B' sont proportionnelles, de même que Q et Q' .

En effet soit x un point quelconque de E , et soit $a \in K$. Comme $Q(x_0) = Q'(x_0) = 0$, les équations (en a) $Q(ax_0 + x) = 0$ et $Q'(ax_0 + x) = 0$ s'écrivent

$$2a B(x_0, x) + Q(x) = 0 \quad \text{et} \quad 2a B'(x_0, x) + Q'(x) = 0.$$

et sont équivalentes par hypothèse. En traduisant les propriétés «avoir une solution et une seule» pour les équations (1), on en déduit que les relations $B(x_0, x) \neq 0$ et $B'(x_0, x) \neq 0$ sont équivalentes, donc aussi les relations $B(x_0, x) = 0$ et $B'(x_0, x) = 0$. Ainsi les formes linéaires $x \mapsto B(x_0, x)$ et $x \mapsto B'(x_0, x)$ ont même noyau H ; par hypothèse ce noyau H est un hyper-

plan. Il existe donc, par l'algèbre linéaire, un élément non-nul c de K tel que

$$B'(x_0, x) = cB(x_0, x). \quad (2)$$

D'autre part l'équivalence des équations (1) montre qu'on a $B(x_0, x) Q'(x) = B'(x_0, x) Q(x)$ pour tout $x \in E$. Il résulte alors de (2) que, pour $x \notin H$, on a

$$Q'(x) = cQ(x) \quad (x \notin H). \quad (3)$$

Or la formule bien connue $2B(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$ montre que, pour x, y et $x + y \notin H$, on a

$$B'(x, y) = cB(x, y). \quad (4)$$

En changeant y en $-y$, on voit que cette relation est encore vraie pour x, y et $x - y \notin H$. Or, comme K n'est pas de caractéristique 2, si on a $x, y \notin H$, les éléments $x + y$ et $x - y$ ne peuvent être tous deux dans H ; donc (4) est vraie pour $x, y \notin H$. Fixons alors $x \in H$, et considérons la forme linéaire $y \mapsto B'(x, y) - cB(x, y)$; on vient de voir qu'elle est nulle en dehors de H ; elle est donc partout nulle car tout élément de l'hyperplan H est différence de deux éléments de son complémentaire. Ainsi (4) est vraie pour $x \notin H$ et y quelconque. En intervertissant les rôles de x et de y , le même raisonnement montre que (4) est vraie pour x et y quelconques. Or, c'est ce qu'on voulait démontrer.

Ecole normale supérieure de jeunes filles
Boulevard Jourdan, 48 (Paris, 14^e)

(Reçu le 21 avril 1967)