Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 13 (1967)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: VOLUME DU SOLIDE ENGENDRÉ PAR LA ROTATION D'UNE AIRE PLANE AUTOUR D'UN AXE QUELCONQUE
Autor: Loeffler, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-41535

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

VOLUME DU SOLIDE ENGENDRÉ PAR LA ROTATION D'UNE AIRE PLANE AUTOUR D'UN AXE QUELCONQUE

par A. LOEFFLER

On sait que Guldin a démontré le théorème suivant: « Le solide engendré par une surface plane quelconque $\mathscr{F}$, dans une révolution entière autour d'un axe fixe a, situé dans son plan, a pour volume V le produit de la circonférence $2\pi\rho$ décrite par son centre de gravité G, multipliée par l'aire S de la surface génératrice. Ainsi l'on a: $V = 2\pi\rho S$. » J'ai trouvé qu'il est possible de généraliser cette proposition en supposant que le plan de la surface génératrice, au lieu de renfermer l'axe fixe, le coupe en un point, ou lui est parallèle.

THÉORÈME. — Considérons, dans l'espace, un axe a, un plan $\mathscr{P}$ et, dans ce plan, une surface $\mathscr{F}$ limitée par une courbe fermée $\mathscr{C}$. Supposons que $\mathscr{F}$ soit entièrement située d'un même côté de la projection a' de a sur le plan $\mathscr{P}$. Si V est la mesure du volume engendré en faisant tourner $\mathscr{F}$ d'un tour complet autour de a, et si on désigne par φ l'angle de a avec le plan $\mathscr{P}$, on a:

$$V = V_0 \cos\varphi \,, \tag{1}$$

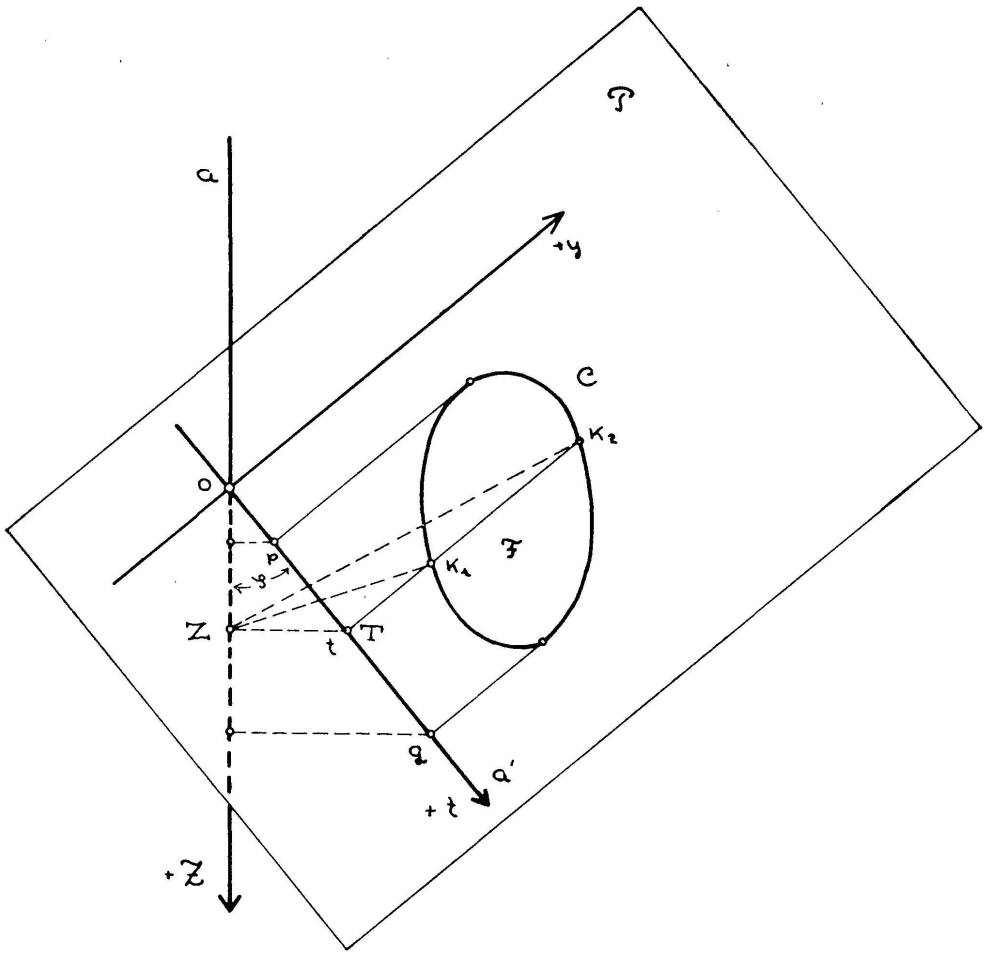
où V_0 est le volume qu'engendrerait $\mathscr{F}$ en tournant de 360° autour de a'.

DÉMONSTRATION. — Plaçons-nous dans le cas général, et supposons que le plan $\mathscr{P}$ coupe l'axe a en un point O. Menons, dans le plan $\mathscr{P}$, par le point O, la perpendiculaire à a'. Soit Oy cette droite. Orientons les axes Oy et a' de façon que $\mathscr{F}$ soit située dans leur premier quadrant. Nous dénommerons Ot l'axe $\acute{a}$. Donc si T est un point de a', on a: $OT = t$. Supposons que la parallèle à Oy, menée par T, rencontre $\mathscr{C}$ en deux points K_1 et K_2, ce qui revient à admettre que C est formée de deux branches. Soient $y = f_1(t)$, et $y = f_2(t)$ leurs équations respectives, dans le système y, t. Orientons l'axe a, et si Z est la projection de T sur a, nous poserons: $\overline{OZ} = z$. Les volumes engendrés par la rotation de $\mathscr{F}$ autour de Ot et de Oz sont, respectivement:

$$V_0 = \mathrm{Vol}\,(F, \vec{t}) = \pi \int_p^q \left[f_2^2(t) - f_1^2(t) \right] dt .$$

$$V = \mathrm{Vol}\,(F, z) = \pi \int_{p\cos\varphi}^{q\cos\varphi} \left[\tilde{f}_2^2(z) - \tilde{f}_1^2(z) \right] dz ,$$

où $z = t \cos\varphi$, où p et q sont les valeurs de t correspondant aux deux points qui sont les extrémités des deux branches de $\mathscr{C}$, et où



$$\tilde{f}_i^2(z) = f_i^2\left(\frac{z}{\cos\varphi}\right) + \frac{z^2 \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} .$$

Donc

$$V = \pi \int_{p\cos\varphi}^{q\cos\varphi} \left[f_2^2\left(\frac{z}{\cos\varphi}\right) - f_1^2\left(\frac{z}{\cos\varphi}\right) \right] dz =$$

$$= \left\{ \pi \int_p^q \left[f_2^2(t) - f_1^2(t) \right] dt \right\} \cos\varphi = V_0 \cos\varphi .$$

La formule (1) est aussi valable dans le cas où le plan $\mathscr{P}$ est parallèle à l'axe a, et où, par suite, l'angle φ est égal à 0. On voit, en effet, qu'on peut utiliser dans ce cas une démonstration analogue à celle qu'on avait suivie pour $\varphi \neq 0$.

(Reçu le 22 décembre 1966.)

8, chemin Fontanettaz
1012 Lausanne-Pully.