§. 1

ÜBER EINE KLASSE VON FUNKTIONALGLEICHUNGEN IM HILBERT-RAUM

Von Z. DARÓCZY

§. 1

Es sei H ein reeller Hilbert-Raum mit Skalarprodukt (x, y) $(x, y \in H)$. Mit $[H \to H]$ bezeichnen wir den Ring der linearen Operatoren von H. Ein Operator $A \in [H \to H]$ wird regulär genannt, wenn die lineare Inverse $A^{-1} \in [H \to H]$ existiert. In der vorliegenden Arbeit wollen wir uns mit der Funktionalgleichung

$$\varphi[A(x) + B(y) + c] = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) + \gamma \qquad (x, y \in H) \tag{1}$$

beschäftigen, wobei φ eine eindeutige Abbildung des Raums H in die Menge der reellen Zahlen R ist. Dabei sind A und B reguläre Operatoren aus $[H \to H]$ und c ist ein Element aus H. Über die Konstanten α, β, γ setzen wir voraus, dass $\alpha\beta \neq 0$ gilt.

Ziel dieser Arbeit ist es, für die Funktionalgleichung (1) notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz nichtkonstanter stetiger Lösungen zu bestimmen.

Im eindimensionalen Fall geht (1) in die bekannte Funktionalgleichung

$$\varphi(ax + by + c) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) + \gamma \qquad (\varphi\colon R \to R;\ x, y \in R) \tag{2}$$

über, wobei keine der Konstanten a, b, α und β gleich Null ist. Für die Funktionalgleichung (2) hat J. ACZÉL in [1] den folgenden Satz bewiesen: *Eine stetige nichtkonstante Lösung der Gleichung* (2) *existiert dann und nur dann, falls $a = \alpha$, $b = \beta$ ist. Dabei muss $\gamma = 0$ sein, falls $\alpha + \beta = 1$ und $c = 0$ ist* (Siehe auch [2]). Wenn φ keine stetige Funktion ist, dann gilt diese Behauptung nicht mehr, wie es die Untersuchungen der Arbeit [3] (Siehe auch [4], [5]) zeigen.

In § 2 beweisen wir zwei Lemmata über die Lösungen von (1). In § 3 untersuchen wir die stetigen nichtkonstanten Lösungen der Funktionalgleichung (1) und wir beweisen eine Verallgemeinerung des Satzes von J. ACZÉL.