7. Le problème de la synthèse spectrale

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Problème 2. Quels sont les anneaux (commutatifs et unitaires) tels que tout idéal soit l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent?

Dans un tel anneau, on a nécessairement:

$$(4) \qquad Aa^2 = Aa\,, \qquad \forall a \in A\,,$$

car les idéaux maximaux qui contiennent a sont identiques à ceux qui contiennent a^2; leur intersection est donc la même pour l'idéal engendré par a et pour l'idéal engendré par a^2. La relation (4) s'écrit encore:

$$(5) \qquad \forall a \in A\,, \quad \exists x \in A \quad \textit{tel que:} \quad a = xa^2 = axa\,.$$

Définition 5. Un anneau vérifiant la propriété (5) s'appelle un anneau *régulier* (au sens de J. Von NEUMANN).

Les anneaux qui sont solution du problème 2 sont donc réguliers.

Réciproquement, un anneau régulier est solution du problème 2. Démontrons d'abord que le radical de Jacobson de l'anneau régulier A est nul. Si $a \in R_J$, l'égalité:

$$a(1-xa) = 0\,,$$

entraîne $a = 0$ car $1 - xa$ est inversible d'après le théorème 1. On démontre de même que le radical de Jacobson de l'anneau quotient A/I est nul, I étant un idéal quelconque. Il en résulte que l'idéal I est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.

On a donc démontré le théorème suivant:

THÉORÈME 10. *Pour qu'un anneau soit solution du problème 2, il faut et il suffit qu'il soit régulier.*

Remarquons qu'un anneau régulier intègre est un corps et que, dans un anneau régulier, tout idéal premier est maximal.

7. LE PROBLÈME DE LA SYNTHÈSE SPECTRALE

Il est remarquable que certains problèmes fondamentaux de l'Analyse admettent une formulation algébrique empruntée à la théorie des idéaux et aux idéaux maximaux. Je citerai *le problème de la synthèse spectrale.* En analyse, on fait intervenir, outre la structure d'anneau, une structure topologique. Les idéaux les plus intéressants sont les idéaux fermés, d'autant plus que tout idéal maximal est fermé. Le problème de la synthèse spectrale dans une algèbre de Banach [1]) commutative s'énonce alors sous la forme suivante:

tout idéal I *fermé est-il l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent?*

La réponse est affirmative dans certains cas généraux, par exemple pour l'algèbre $C(X)$ des fonctions continues à valeurs complexes définies sur un espace compact ([4], page 51). En d'autres termes, à tout idéal fermé I dans $C(X)$ correspond un sous-ensemble fermé S de X tel que I coïncide avec les fonctions continues sur X qui s'annulent sur S. Nous avons donc une situation analogue à celle qui découle du théorème des zéros de Hilbert pour les idéaux premiers de $K[X_1, \ldots, X_n]$.

Par contre, la réponse est négative pour l'algèbre $L_1(R)$ des fonctions à valeurs complexes intégrables au sens de Lebesgue sur toute la droite réelle, deux fonctions égales presque partout étant identifiées, la multiplication étant définie par le produit de convolution:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt\,,$$

et la norme étant la L_1 – norme définie par:

$$\| f \|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) |\, dx\,.$$

Un contre-exemple au problème de la synthèse spectrale a été donné par MALLIAVIN, qui a donné aussi un contre-exemple montrant que la réponse est encore négative pour l'algèbre A des séries de Fourier absolument convergentes:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}\,, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} | a_n | < \infty\,,$$

le produit étant défini par:

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x)$$

et la norme $\| f \|$ par la deuxième somme écrite plus haut.

En conclusion, nous voyons par tous les exemples abordés ici, que la théorie des idéaux d'un anneau, et en particulier la représentation de certains idéaux comme l'intersection des idéaux maximaux qui les contiennent, est d'une grande importance en algèbre et dans d'autres branches des Mathématiques.

---

1) Algèbre A sur le corps des réels ou des complexes, normée de façon que $\| xy \| \leq \| x \| \| y \|$, quel que soient $x, y \in A$, et complète pour la topologie d'espace vectoriel normé.