§2. — Caractérisation des couples henseliens

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

En effet, dans chacune de ces deux lignes, les deux membres, qui sont des polynômes de degré $\binom{n}{r} - 1$ en V sur $A_0[X]$ prennent la même valeur quand on substitue à V les $\binom{n}{r}$ valeurs E^σ, où $\sigma \in \mathscr{S}$.

Un petit calcul conduit à l'identité:

(1) $P'^2(V)F(X) =$

$$= [P'(V)X^r + \ldots + (-1)^r B_r(V)][P'(V)X^{n-r} + \ldots + (-1)^{n-r} C_{n-r}(V)] +$$

$$+ P(V)Q(V, X).$$

Remarquons enfin que le résultant de $G(X)$ et $H(X)$ divise $P'(E)$ dans l'anneau A_1 car $P'(E) = \prod_{\sigma \neq 1} (E - E^\sigma)$ « s'annule si $G(X)$ et $H(X)$ ont une racine commune ».

Comme tout anneau est quotient d'un anneau factoriel, *les identités ci-dessus sont valables si l'on remplace* A *par un anneau commutatif à élément unité quelconque.*

§ 2. — Caractérisation des couples henseliens

Soit A un anneau commutatif unitaire, $\mathscr{A}$ un idéal de A, $\bar{A} = A/\mathscr{A}$ l'anneau quotient. On note $\bar{a}$ l'image ou « reste » dans $\bar{A}$ de l'élément a de A, $\bar{f}$ l'image du polynôme f à coefficients de A, que nous appellerons le reste de f.

Si $\phi \in A$, on note A_ϕ l'anneau de fractions relatif à la partie multiplicative des puissances positives de ϕ; on notera a_ϕ (resp. f_ϕ) l'image dans A_ϕ de l'élément $a \in A$ (resp. du polynôme f sur A).

Si, de plus, ϕ est inversible modulo $\mathscr{A}$, on a un diagramme commutatif canonique:

$$\begin{tikzcd} & A_\varnothing \arrow[d] \\ A \arrow[ur] \arrow[r] & \bar{A} \end{tikzcd}$$

qui permet de parler du reste d'un élément de A_ϕ ou d'un polynôme à coefficients dans A_ϕ.

Proposition 1. — Les conditions suivantes sur le couple $(A, \mathscr{A})$ sont équivalentes:

(i) Si f est un polynôme unitaire de $A[X]$ dont le reste se décompose en le produit de deux polynômes unitaires $\bar{g}$ et $\bar{h}$ de résultant inversible, il existe $\phi \in A$, de reste inversible, deux polynômes unitaires g et $h \in A_{\phi}[X]$, de restes respectifs $\bar{g}$ et $\bar{h}$, de résultant inversible tel que $f_{\phi} = gh$.

(ii) Si $p(V) = V^k - a_1 V^{k-1} - \dots - a_k$ est un polynôme de $A[V]$ tel que $a_2, \dots, a_k$ appartiennent à $\mathscr{A}$ et que $\bar{a}_1$ soit inversible, il existe $\phi \in A$ de reste inversible, et un élément $a \in A_{\phi}$, de reste $\bar{a}_1$, racine simple de $p(V)$ [i.e. $p_{\phi}(a) = 0$, $p'_{\phi}(a)$ inversible].

(iii) Si $p(V)$ est un polynôme unitaire de $A[V]$ dont le reste a une racine simple $\bar{e}$, il existe $\phi \in A$, de reste inversible, et une racine simple e, de $p_{\phi}(V)$ dans A_{ϕ}, de reste $\bar{e}$.

(iv) Si $q(U) = U^k - b_1 U^{k-1} - \dots - b_k$ est un polynôme de $A[U]$ tel que $b_k \in \mathscr{A}$ et que $\bar{b}_{k-1}$ soit inversible, alors il existe $\phi \in A$, de reste inversible et un élément $d \in A_{\phi}$, de reste nul, racine simple de $q_{\phi}(U)$.

Démonstration. — Il est clair que (iii) entraîne (ii) et que (i) entraîne (iv). D'autre part, en opérant une translation sur U, on voit que (iv) entraîne (iii).

Montrons que (ii) entraîne (i).

Soit $f = X^n - s_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n$ le polynôme donné. Soit $h_1 \in A[X]$ de reste $\bar{h}$. On pose $E = h_1(X_1) \dots h_1(X_n)$. On en déduit, avec les notations du § 1, les polynômes $P(V)$, $B_i(V)$, $C_i(V)$, $Q(V, X)$. Par l'homomorphisme de A sur $\bar{A}$, ces polynômes sont transformés en $\bar{E}$, $\bar{P}$, $\bar{B}_i$, $\bar{C}_i$, $\bar{Q}$. D'autre part, spécialisant S_i en s_i ($i \in I$) on obtient, avec des notations évidentes $p(V)$, $b_i(V)$, $e_i(V)$, $q(V, X)$ qui, d'après le § 1, vérifient:

$$p'^2(V)f =$$

$$= [p'(V)X^r + \dots + (-1)^r b_r(V)]\,[p'(V)X^{n-r} + \dots + (-1)^{n-r} c_{n-r}(V)]\,.$$

$$+ p(V)q(V, X)\,.$$

Pour calculer le reste de $p(V)$, on introduit un anneau $\bar{B}$ contenant $\bar{A}$ et des x_i ($i \in I$) tels que $\bar{g}(X) = \prod_{i \in J}(X - \bar{x}_i)$, $\bar{h}(X) = \prod_{i \in I - J}(X - \bar{x}_i)$. La substitution $X_i \to \bar{x}_i$ transforme $\bar{E}$ en le résultant inversible $\bar{e} = \bar{h}(\bar{x}_1) \dots \bar{h}(\bar{x}_r)$ de $\bar{g}$ et $\bar{h}$, et, comme, pour $\sigma \neq 1$, $\bar{E}^{\sigma}$ est transformé en 0, on aura $\bar{p}(V) = V^{k-1}(V - \bar{e})$, où $k = \binom{n}{r}$.

Il existe, d'après (ii), un élément $\phi \in A$, de reste inversible, et un élément $e \in A_{\phi}$, de reste $\bar{e}$ tel que $p_{\phi}(e) = 0$ et que $p'_{\phi}(e)$ soit inversible. On a donc la décomposition dans A:

$$(2)\qquad f = \left[X^r - \frac{b_{1,\phi}(e)}{p_\phi'(e)} X^{r-1} + \ldots + (-1)^r \frac{b_{r,\phi}(e)}{p_\phi'(e)}\right] \cdot$$
$$\cdot \left[X^{n-r} - \frac{c_{1,\phi}(e)}{p_\phi'(e)} X^{n-r-1} + \ldots + (-1)^{n-r} \frac{c_{n-r,\phi}(e)}{p_\phi'(e)}\right].$$

Pour voir que les polynômes entre crochets ont, pour restes, $\bar{g}$ et $\bar{h}$, il suffit d'utiliser le fait que $\bar{B}_i(\bar{E}) = \bar{P}'(\bar{E})\, T_i$, $\bar{C}_i(\bar{E}) = \bar{P}'(\bar{E})\, U_i$ et la substitution $X_i \to \bar{x}_i$. La remarque faite en fin du § 1 entraîne que le résultant de ces deux polynômes est inversible.

Proposition 2. — Les conditions suivantes sur le couple $(A, \mathscr{A})$ sont équivalentes:

(i) Si f est un polynôme unitaire de $A[X]$ dont le reste se décompose en le produit de deux polynômes unitaires $\bar{g}$ et $\bar{h}$ de résultant inversible, il existe $\phi \in A$ de reste inversible possédant la propriété suivante: il existe un couple de polynômes $g, h \in A_\phi[X]$ de restes respectifs $\bar{g}$ et $\bar{h}$, tel que $f_\phi = gh$. Le couple (g, h) est unique sous ces conditions et le résultant de g et h est inversible.

(ii) Si $p(V) = V^k - a_1 V^{k-1} - \ldots - a_k$ est un polynôme de $A[V]$ tel que $a_2, \ldots, a_k$ appartiennent à $\mathscr{A}$ et que $\bar{a}_1$ soit inversible, il existe un élément $\phi \in A$ de reste inversible possédant la propriété suivante: p_ϕ a dans A une racine de reste $\bar{a}$, unique sous ces conditions et simple.

(iii) Si $p(V)$ est un polynôme unitaire de $A[V]$ dont le reste a une racine simple $\bar{e}$, il existe $\phi \in A$ de reste inversible possédant la propriété suivante: p_ϕ a, dans A_ϕ, une racine de reste $\bar{e}$, unique sous ces conditions et simple.

(iv) Si $q(U) = U^k - b_1 U^{k-1} - \ldots - b_k$ est un polynôme de $A[U]$ tel que b_k appartienne à $\mathscr{A}$ et que $\bar{b}_{k-1}$ soit inversible, il existe $\phi \in A$, de reste inversible possédant la propriété suivante: q_ϕ a dans A_ϕ une racine de reste nul, unique sous ces conditions et simple.

Démonstration. — Ici encore il suffit de montrer que (ii) entraîne (i). On reprend la construction de la démonstration correspondante de la proposition 1. On part de $h_1 \in A[X]$, de reste $\bar{h}$, qui fournit le polynôme $p(V) \in A[X]$. L'élément ϕ de cette construction est choisi de manière à satisfaire les hypothèses (ii) ci-dessus, c'est-à-dire que p_ϕ a dans A_ϕ une racine e de reste $\bar{e}$, unique sous ces conditions, et simple.

Soit alors $f = gh$ une autre décomposition avec g et h de restes respectifs $\bar{g}$ et $\bar{h}$. On introduit un anneau B contenant A et des x_i $(i \in I)$ tels que $g = \prod_{i \in J} (X - x_i)$, $h = \prod_{i \in I - J} (X - x_i)$. Pour calculer $p_\phi(V)$, on utilise la spécialisation $X_i \to x_i$, de sorte que l'élément $h_1(x_1) \dots h_1(x_2)$ est racine de p_ϕ, et comme il a pour reste $\bar{e}$, il est nécessairement égal à e. Compte tenu des relations $P'(V)\,V_i(V) = T_i$, $P'(V)\,C_i(V) = U_i$, on voit alors que la décomposition $f = gh$ n'est autre que celle obtenue par l'identité (2), ce qui en montre l'unicité.

Remarque. — Si ϕ possède la propriété ci-dessus, il en est de même de tout élément $\phi\theta$, où $\bar{\theta}$ est inversible.

Définition. — Un couple vérifiant les conditions de la proposition 1 (resp. 2) sera dit faiblement hensélien (resp. hensélien).

Remarque. — Nous ne gardons pas ici les définitions de J.P. Lafon mais nous allons voir ci-dessous que dans les cas usuels les notions coïncident.

§ 3. — Propriétés élémentaires

1. — Soit $(A, \mathscr{A})$ un couple tel que $\mathscr{A}$ soit contenu dans le radical (de Jacobson) ou intersection des idéaux maximaux de A (il revient au même de dire qu'un élément de A est inversible dès que son reste l'est. Si $(A, \mathscr{A})$ est faiblement hensélien, alors il est hensélien. On retrouve alors la définition de Lafon.

Tout d'abord les éléments ϕ intervenant dans les énoncés des propositions peuvent être choisis égaux à 1. Il reste à voir l'unicité de la décomposition de f sous les hypothèses de (1) prop. 2. La démonstration faite dans le cas local dans [1] s'étend sans modification:

Si $f = gh = g_1h_1$ avec $\bar{g} = \bar{g}_1$, $\bar{h} = \bar{h}_1$, g et h_1 ont un résultant inversible puisqu'il en est de même de leur reste. Il existe alors $u, v \in A\,[X]$ tels que $ug + vh_1 = 1$, soit $ugh + vh_1h = h$, d'où $(ug_1 + vh)\,h_1 = h$; le polynôme h_1 divise h; de même h divise h_1; ces polynômes étant unitaires, on a $h = h_1$ et de même, $g = g_1$.

2. — Soit $(A, \mathscr{A})$ un couple et $\phi \in A$ de reste inversible; les éléments de A_ϕ de reste nul forment l'idéal $\mathscr{A}_\phi$ des fractions $a/\mathscr{A}_\phi{}^p$ où $a \in \mathscr{A}$, $p \in N$.

Si $(A, \mathscr{A})$ est faiblement hensélien ou hensélien, il en est de même de $(A_\phi, \mathscr{A}_\phi)$.

Supposons $(A, \mathscr{A})$ faiblement hensélien, et soit $p(V) = V^k - b_1V^{k-1} - \dots - b_k$ un polynôme sur A_ϕ où $\bar{b}_1$ est inversible et où $b_1, \dots, b_k \in \mathscr{A}_\phi$. En prenant l'entier m assez grand, on peut écrire

$$p(V) = V^k - \frac{a}{\phi^m}\,V^{k-1} - \dots - \frac{a_k}{\phi^{km}}$$