III. Théorème de préparation Weierstrass. Malgrange

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **13 (1967)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

série de Taylor formelle: si $\bar{f}$ est un tel germe, on note f une fonction de classe C^{∞} dans un voisinage de 0 dans k^n représentant $\bar{f}$ et on définit

$$\frac{\partial X_1^{i_1} \dots \partial X_n^{i_n}}{\partial^{i_1+\dots+i_n}} \bar{f}(0)$$

comme la dérivée correspondante à l'origine de f; la série de Taylor formelle de $\bar{f}$ est la série

$$\sum \frac{\partial^{i_1+\dots+i_n}}{\partial X_1^{i_1} \dots \partial X_n^{i_n}} \bar{f}(0) \frac{X_1^{i_1}}{i_1!} \dots \frac{X_n^{i_n}}{i_n!}$$

Un théorème classique d'E. Borel affirme que l'homomorphisme ainsi défini de $\mathscr{E}_n$ dans l'anneau $k[[X_1, ..., X_n]]$ est *surjectif*.

Comme l'anneau $k[[X_1, ..., X_n]]$ est complet, on voit qu'il est le séparé complété de $\mathscr{E}_n$.

Le noyau de l'homomorphisme surjectif $\mathscr{E}_n \to k[[X_1, ..., X_n]]$ est l'idéal des germes de *fonctions plates* (exemple, en une variable, $x \to x^k e^{-1/x^2}$). Si m est l'idéal maximal de $\mathscr{E}_n$, ce noyau est, évidemment, $\cap\, m^n$. *L'anneau* $\mathscr{E}_n$ *n'est donc pas noethérien.* Toutefois, l'idéal m est *de type fini* engendré par les germes des fonctions coordonnées. Les quotients des anneaux $\mathscr{E}_n$ sont appelés *algèbres différentiables.*

III. Théorème de préparation: Weierstrass. Malgrange

Cas formel.

Une série $f(X_1, ..., X_n) \in k[[X_1, ..., X_n]]$ est dite *régulière d'ordre s en* X_n si, en l'ordonnant par rapport à X_n, $f(X_1, ..., X_n) = f_0(X_1, ..., X_{n-1}) + ... + f_{s-1}(X_1, ..., X_{n-1}) X_n^{s-1} + f_s(X_1, ..., X_{n-1}) X_n^s + ...$, les conditions suivantes sont satisfaites:

$$\begin{cases} f_0(0, \dots, 0) = \dots = f_{s-1}(0, \dots, 0) = 0 \\ f_s(0, \dots, 0) \neq 0 \end{cases}$$

Si le corps k est de caractéristique 0 ou si $s = 1$ ceci se traduit par les conditions:

$$f(0, \dots, 0) = \dots = \frac{\partial^{s-1} f}{\partial X_n^{s-1}}(0, \dots, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^s f}{\partial X_n^s}(0, \dots, 0) \neq 0$$

Il y a lieu de remarquer que *toute série formelle peut être rendue régulière par un automorphisme de la k-algèbre* $k[[X_1, \ldots, X_n]]$: si $f_s(X_1, \ldots, X_n)$ est la partie homogène de plus bas degré de la série f, ou bien $X_1, \ldots, X_{n-1}$ ne figurent pas dans $f_s(X_1, \ldots, X_n)$ et f est régulière d'ordre s en X_n ou bien l'un d'entre eux y figure et si le corps k est infini (c'est le cas qui nous intéresse), on peut trouver $a_1, \ldots, a_{n-1}$ dans k en sorte que $f_s(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1)$ soit non nul. L'automorphisme défini par

$$X_i \to X_i + a_i X_n \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

$$X_n \to X_n$$

transforme f en une série régulière d'ordre s en X_n.

Le théorème de préparation affirme que si f est régulière d'ordre s en X_n et si $g \in k[[X_1, \ldots, X_n]]$, il existe deux séries q et $r \in k[[X_1, \ldots, X_n]]$ telles que

$$g = qf + r$$

r soit un polynôme de degré au plus $s-1$ en X_n à coefficients dans $k[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$. De plus, *$q$ et r sont uniquement déterminés par ces conditions.*

Appliquant au cas où $g = X_n^s$, on obtient l'égalité $X_n^s - r = qf$. On vérifie par un calcul facile sur les coefficients de X_n^i que la série q est *inversible* et que le premier membre est un *polynôme unitaire de degré s en X_n, les coefficients des termes de degré strictement inférieur à s s'annulant pour* $X_1 = \ldots = X_{n-1} = 0$. Un tel polynôme est dit *distingué.*

Ainsi, *une série régulière d'ordre s en X_n est associée à un polynôme distingué de degré s* (en X_n).

Cas analytique.

Tous les résultats précédents restent valables en remplaçant séries formelles par séries convergentes: preuve par la méthode des fonctions majorantes ou par une méthode de même nature.

Cas algébrique.

Un théorème de préparation n'est plus valable dans ce cas. Nous verrons même qu'une forme plus faible n'est pas valable *(théorème des fonctions implicites).*

Cas différentiable.

Un germe $\in \mathscr{E}_n$ est dit *régulier d'ordre s en la n-ème variable* si sa série de Taylor formelle l'est en X_n: cette condition se traduit donc au moyen des dérivées partielles par rapport à X_n comme dans le cas formel.

Si $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont des éléments de $\mathcal{E}_n$ tels que $\bar{f}$ soit régulier d'ordre s par rapport à la n-ème variable, on peut trouver des éléments $\bar{q}$ et $\bar{r}$ de $\mathcal{E}_n$ tels que

$$\bar{g} = \bar{q}\bar{f} + \bar{r}$$

et que $\bar{r}$ soit le germe d'une fonction de classe C^∞ polynômiale par rapport à la n-ème variable.

Ce théorème est dû à *Malgrange*. Il faut indiquer que dans ce cas $\bar{q}$ et $\bar{r}$ *ne sont plus déterminés de manière unique* par les conditions ci-dessus.

Il existe d'autres formes du théorème de préparation équivalentes à cette forme classique mais présentant, en particulier, l'avantage de faire intervenir non seulement les anneaux types mais aussi leurs anneaux quotients (algèbres analytiques, algèbres différentiables). Disons un peu brièvement qu'un homomorphisme $\varphi : A \to B$ d'anneaux locaux est *quasi-fini* s'il est *local* i.e. applique l'idéal maximal de A dans celui de B, et si son prolongement $\hat{\varphi}$ aux complétés séparés $\hat{A} \to \hat{B}$ est *fini,* i.e. munit $\hat{B}$ d'une structure de $\hat{A}$-module de type fini. Une forme du théorème de préparation différentiable (resp. analytique) affirme que si A et B sont des algèbres différentiables (resp. analytiques), un homomorphisme quasi-fini est fini.

IV. Un cas particulier important: Le théoreme des fonctions implicites

Le lemme de Hensel.

Le théorème des fonctions implicites pour une équation (mais il serait facile de traiter le cas général) est un cas particulier du théorème de préparation. Soit $f(X_1, ..., X_n)$ une série formelle ou convergente régulière d'ordre 1 en X_n. Son polynôme distingué est de la forme $X_n - g(X_1, ..., X_{n-1})$ où $g(X_1, ..., X_{n-1})$ est un élément de $k[\![X_1, ..., X_{n-1}]\!]$ ou $k\{\{X_1, ..., X_{n-1}\}\}$ tel que $g(0, ..., 0) = 0$.

On peut donc substituer $g(X_1, ..., X_{n-1})$ à X_n dans $f(X_1, ..., X_n)$ obtenant l'égalité

$$f(X_1, ..., X_{n-1}, g(X_1, ..., X_{n-1})) = 0$$

D'autre part, l'hypothèse faite sur f correspond bien à celle du théorème des fonctions implicites

$$f(0, \ldots, 0) = 0\,,\ \frac{\partial f}{\partial X_n}(0, \ldots, 0) \neq 0\,.$$

La situation est analogue dans l'anneau $\mathcal{E}_n$, l'unicité qui n'était pas assurée dans le cas général du théorème de préparation (en raison de l'exis-