

# FIBRES SUR LE BRANCHEMENT SIMPLE

Autor(en): **Godbillon, C. / Reeb, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1966)**

Heft 4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-40748>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# FIBRÉS SUR LE BRANCHEMENT SIMPLE

par C. GODBILLON et G. REEB

## 1. INTRODUCTION

On sait l'intérêt que présentent les variétés topologiques non séparées à une dimension dans l'étude des feuilletages du plan. En effet, tout feuilletage  $\mathcal{F}$  du plan possède les propriétés suivantes:

- a) les feuilles de  $\mathcal{F}$  sont fermées et homéomorphes à la droite réelle  $\mathbb{R}$  [1];
- b) l'espace des feuilles  $X$  de  $\mathcal{F}$  est une variété topologique à une dimension, en général non séparée, simplement connexe et à base dénombrable [1];
- c) la projection canonique du plan sur  $X$  est une fibration localement triviale [2].

La situation la plus simple (en dehors du cas bien connu où  $X$  est la droite réelle  $\mathbb{R}$ ) est celle où  $X$  est le branchement simple [1]. La non séparation de  $X$  met alors en défaut les deux résultats fondamentaux suivants [3]:

- un fibré localement trivial dont la base est contractile est trivial;
- un fibré localement trivial dont la fibre est contractile a une section.

Le but de cet article est d'aborder, sur le cas du branchement simple, une étude des fibrés localement triviaux de fibre  $\mathbb{R}$  dont la base est une variété à une dimension non séparée.

Après avoir obtenu des critères de séparation et de non séparation de l'espace total, on montre comment le type de ces fibrés peut varier à l'infini. Sans vouloir en expliciter une classification générale (d'un intérêt d'ailleurs limité), on donne cependant un théorème d'unicité des fibrés ayant un espace total séparé. Ces fibrés, qui sont tous isomorphes pour le groupe des homéomorphismes croissants de la droite, se répartissent en deux classes d'équivalence pour ce groupe; par contre, ils sont tous équivalents pour le groupe des homéomorphismes.

Interprété en termes de structures feuilletées du plan, ce théorème permet de donner une classification de ces feuilletages (orientés ou non)

ayant le branchement simple pour espaces des feuilles, résultat qui précise ici un théorème général de W. Kaplan [2].

Dans une dernière partie on restreint le groupe structural des fibrés au groupe des translations et au groupe des difféomorphismes de  $\mathbb{R}$ . Dans ce cas-ci on obtient aussi un théorème de classification des fibrés différentiables séparés; par contre on ne peut plus en déduire une classification différentiable des feuilletages différentiables du plan.

## 2. LE BRANCHEMENT SIMPLE

Soient  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  deux exemplaires de la droite réelle paramétrés respectivement par  $x_1$  et  $x_2$ . Le branchement simple  $X$  est le quotient de la somme topologique  $\Sigma = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$  par la relation d'équivalence qui identifie les points  $x_1$  et  $x_2$  pour  $x_1 = x_2 = x < 0$ . On note  $\pi$  la projection de  $\Sigma$  sur  $X$ .

L'espace  $X$  est une variété topologique de dimension 1 non séparée. En effet  $U_1 = \pi(\mathcal{R}_1)$  et  $U_2 = \pi(\mathcal{R}_2)$  sont des ouverts de  $X$ , et les restrictions de  $\pi$  à  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  définissent un atlas de  $X$ ; on identifiera l'intersection  $U = U_1 \cap U_2$  avec l'intervalle  $] -\infty, 0 [$  de  $\mathbb{R}$ . Les points  $o_1 \in U_1$  et  $o_2 \in U_2$ , images par  $\pi$  des origines de  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , sont les points de branchement de  $X$  (points non séparés).

L'involution de  $\Sigma$  qui échange les deux exemplaires  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  définit une involution continue  $h$  de  $X$  qui échange les deux ouverts  $U_1$  et  $U_2$  en laissant fixes les points de  $U$ .

Plus généralement, un homéomorphisme  $f$  de  $X$  laisse  $U_1$  et  $U_2$  invariants ou les permute; le premier cas est caractérisé par  $f(o_1) = o_1$  (ou  $f(o_2) = o_2$ ), le second par  $f(o_1) = o_2$  (ou  $f(o_2) = o_1$ ). Dans tous les cas on a  $f(U) = U$ .

On peut enfin remarquer que le branchement simple est un espace contractile, donc acyclique.

## 3. FIBRÉS SUR LE BRANCHEMENT SIMPLE

Soit  $\eta = (E, p, X)$  un fibré localement trivial de base  $X$  et de fibre  $\mathbb{R}$ ; tous les fibrés intervenant dans la suite étant de ce type, on dira simplement que  $\eta$  est un fibré sur  $X$ .

On peut considérer  $\eta$  comme un fibré à groupe structural au sens de Steenrod [3]; le groupe de structure est ici le groupe  $G$  des homéomor-

phismes de la droite réelle  $\mathfrak{R}$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

Les fibrés induits par  $\eta$  sur les ouverts  $U_1$  et  $U_2$  sont triviaux. Deux trivialisations  $\Phi_1: U_1 \times \mathfrak{R} \rightarrow p^{-1}(U_1)$  et  $\Phi_2: U_2 \times \mathfrak{R} \rightarrow p^{-1}(U_2)$  de  $\eta/U_1$  et  $\eta/U_2$  déterminent alors un changement de carte continu  $g: ]-\infty, 0[ \rightarrow G$  (noté  $x \rightarrow g_x$ ) tel que

$$\Phi_1(x_1, y) = \Phi_2(x_2, g_x(y)) \quad \text{pour } x_1 = x_2 = x < 0.$$

Réciproquement une application continue  $g$  de  $]-\infty, 0[$  dans  $G$  permet de construire un fibré  $\eta = (E, p, X)$  sur  $X$ ;  $g$  détermine de plus des trivialisations  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  de  $\eta/U_1$  et  $\eta/U_2$ .

Soit  $g'$  une seconde application continue de  $]-\infty, 0[$  dans  $G$  et soient  $\eta' = (E', p', X)$  le fibré associé,  $\Phi'_1$  et  $\Phi'_2$  les trivialisations correspondantes de  $\eta/U_1$  et  $\eta'/U_2$ . Un isomorphisme  $F$  de  $\eta$  sur  $\eta'$  détermine un homéomorphisme  $f$  de  $X$ . Si  $o_1$  est un point fixe de  $f$ , on peut trouver deux applications continues  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathfrak{R}$  dans  $G$  telles que

$$\begin{aligned} F\Phi_1(x_1, y) &= \Phi'_1(f(x_1), \alpha_{x_1}(y)) \\ F\Phi_2(x_2, y) &= \Phi'_2(f(x_2), \beta_{x_2}(y)); \end{aligned}$$

la condition de compatibilité s'écrit alors

$$g'_{f(x)} \alpha_x = \beta_x g_x \quad \text{pour tout } x < 0.$$

Réciproquement la donnée de deux applications continues  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathfrak{R}$  dans  $G$  et d'un homéomorphisme  $f$  de  $]-\infty, 0]$  vérifiant la condition de compatibilité précédente permet de construire un isomorphisme  $F$  de  $\eta$  sur  $\eta'$ .

Si par contre  $f$  échange  $o_1$  et  $o_2$  la condition de compatibilité s'écrit

$$\alpha_x = g'_{f(x)} \beta_x g_x \quad \text{pour tout } x < 0.$$

Les fibrés  $\eta$  et  $\eta'$  sont équivalents dans  $G$  si on peut trouver un isomorphisme  $F$  pour lequel  $f$  est l'identité.

#### PROPOSITION 1.

Soit  $\eta = (E, p, X)$  un fibré sur  $X$ . On peut réduire le groupe de structure de  $\eta$  au sous-groupe  $G^+$  des homéomorphismes croissants de  $\mathfrak{R}$ .

*Démonstration.* — Le groupe  $G$  des homéomorphismes de  $\mathfrak{R}$  a deux composantes connexes par arcs: le sous-groupe  $G^+$  et l'ensemble  $G^-$  des homéomorphismes décroissants.

Soit  $g$  le changement de carte associé à des trivialisations de  $\eta/U_1$  et  $\eta/U_2$ . Si  $g$  est à valeurs dans  $G^-$ ,  $\eta$  est équivalent au fibré associé à  $-g$ ; il suffit en effet de prendre  $\alpha_x = -\beta_x = \text{identité}$  pour tout  $x \in \mathfrak{R}$ .

COROLLAIRE.

Tout fibré sur  $X$  est orientable.

On supposera dorénavant que les fibrés sur  $X$  sont définis par un changement de carte à valeurs dans  $G^+$

PROPOSITION 2.

|| Les fibrés  $\eta$  et  $\eta'$  associés aux changements de carte  $x \rightarrow g_x$  et  $x \rightarrow g_x^{-1}$  sont isomorphes dans  $G^+$ .

Il suffit en effet de prendre pour  $\alpha$  et  $\beta$  l'application constante de  $\mathfrak{R}$  sur l'identité, et pour homéomorphisme de  $X$  l'involution  $h$ .

*Remarque.* — Les fibrés  $\eta$  et  $\eta'$  ne sont pas en général équivalents dans  $G^+$  comme le montre l'exemple où  $g$  est défini par  $g_x(y) = y + \frac{1}{x}$ .

Mais dans cet exemple  $\eta$  et  $\eta'$  sont équivalents dans  $G$  (on prend  $\alpha_x = \beta_x = -\text{identité}$  pour tout  $x \in \mathfrak{R}$ ). Par contre si  $g$  est défini par  $g_x(y) = -xy$ ,  $\eta$  et  $\eta'$  ne sont pas équivalents dans  $G$ .

PROPOSITION 3.

|| Soit  $\eta = (E, p, X)$  un fibré sur  $X$ . L'espace  $E$  est une variété topologique de dimension 2 (en général non séparée), simplement connexe et acyclique.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la trivialité locale et de la suite exacte d'homotopie de  $\eta$  [3].

COROLLAIRE.

|| Si  $E$  est séparé, il est homéomorphe au plan  $\mathfrak{R}^2$ . Les fibres de  $\eta$  définissent alors un feuilletage du plan ayant  $X$  pour espace des feuilles.

*Remarque.* — Dans cette dernière situation le changement de carte  $g$  définit non seulement une orientation du feuilletage, mais aussi une orientation du plan.

Si deux tels fibrés sont isomorphes dans  $G^+$ , l'homéomorphisme correspondant du plan est compatible avec ces deux orientations; par contre un isomorphisme dans  $G$ , et non dans  $G^+$  induit un homéomorphisme compatible avec les orientations des feuilletages, mais renversant l'orientation du plan.

#### 4. CRITÈRES DE SÉPARATION

Soient  $\eta = (E, p, X)$  un fibré sur  $X$ ,  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  des trivialisations de  $\eta/U_1$  et  $\eta/U_2$ , et  $g$  le changement de carte associé.

Les ensembles  $p^{-1}(U_1)$ ,  $p^{-1}(U_2)$  et  $p^{-1}(X - \{o_1, o_2\})$  sont des ouverts séparés de  $E$ . Par conséquent si  $e_1 \in p^{-1}(U_1)$  et  $e_2 \in p^{-1}(U_2)$  sont des points non séparés de  $E$  on a  $e_1 = \Phi_1(0, y)$  et  $e_2 = \Phi_2(0, z)$ .

PROPOSITION 4.

|| Pour que  $E$  soit non séparé, il faut et il suffit qu'il existe  
 || une suite  $(\xi_n)$  de nombres négatifs tendant vers 0,  
 || une suite  $(y_n)$  ayant une limite finie  $y$ ,  
 || telles que la suite  $(g_{\xi_n}(y_n))$  ait une limite finie  $z$ .

*Démonstration.* — La condition est suffisante car la suite  $\varepsilon_n = \Phi_1(\xi_n, y_n) = \Phi_2(\xi_n, g_{\xi_n}(y_n))$  converge simultanément vers les points  $e_1 = \Phi_1(0, y)$  et  $e_2 = \Phi_2(0, z)$ .

Supposons réciproquement que  $e_1 = \Phi_1(0, y)$  et  $e_2 = \Phi_2(0, z)$  soient deux points non séparés de  $E$ . Soient  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (resp.  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) un système fondamental de voisinages emboîtés de  $e_1$  (resp. de  $e_2$ ) contenus dans  $p^{-1}(U_1)$  (resp.  $p^{-1}(U_2)$ ). Pour tout  $n$  on peut trouver un point  $\varepsilon_n = \Phi_1(\xi_n, y_n) = \Phi_2(\xi_n, g_{\xi_n}(y_n))$  dans  $V_n \cap W_n$ . La suite  $(\varepsilon_n)$  tend alors simultanément vers  $e_1$  et vers  $e_2$ ; les suites  $(\xi_n)$ ,  $(y_n)$  et  $(g(\xi_n) y_n)$  ont donc respectivement 0,  $y$  et  $z$  pour limites.

C.q.f.d.

COROLLAIRE.

|| Soit  $z$  un point d'accumulation de  $g_x(y)$  pour  $y$  fixé et  $x$  tendant  
 || vers 0. Alors les points  $\Phi_1(0, y)$  et  $\Phi_2(0, z)$  ne sont pas séparés  
 || dans  $E$ .

*Exemples.* — Soient  $(\eta_i)_{0 \leq i \leq 7}$  les fibrés associés aux changements de carte suivants:

$$0 - g_x(y) = y$$

$$1 - g_x(y) = y + \sin \frac{1}{x}$$

$$2 - g_x(y) = y + \left| \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right|$$

$$3 - g_x(y) = y + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$$

$$4 - g_x(y) = -xy$$

$$5 - g_x(y) = \begin{cases} -xy & \text{si } |y| \leq 1 \\ -x + y - 1 & \text{si } y \geq 1 \\ x + y + 1 & \text{si } y \leq -1 \end{cases}$$

$$6 - g_x(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{x} & \text{si } y \leq 0 \\ y + \frac{1}{x} + \exp\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

$$7 - g_x(y) = y + \frac{1}{x}$$

On déduit du corollaire précédent que les fibrés  $(\eta_i)_{0 \leq i \leq 5}$  ne sont pas séparés, et de la proposition 4 que  $\eta_6$  est aussi non séparé alors que  $\eta_7$  est séparé.

On peut d'ailleurs remarquer, en considérant les ensembles d'accumulation de  $g_x(y)$  pour  $y$  fixé et  $x$  tendant vers 0, que ces fibrés sont tous distincts (deux à deux non isomorphes).

Ces exemples montrent aussi comment on peut varier à l'infini le type des fibrés sur  $X$ .

#### PROPOSITION 5.

|| Pour que  $E$  soit séparé il faut et il suffit que pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$   
|| on ait  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$  (ou  $+\infty$ ).

*Démonstration.* — Si  $E$  est séparé, le corollaire de la proposition 4 montre que  $g_x(y)$  n'a pas de point d'accumulation à distance finie pour  $y$  fixé et  $x$  tendant vers 0; on a donc  $\lim |g_x(y)| = \infty$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$ .

Désignons par  $A$  (resp.  $B$ ) l'ensemble des points  $y$  de  $\mathfrak{R}$  tels que  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$  (resp.  $= +\infty$ ) et supposons  $A$  et  $B$  non vides.

Si  $y_0$  est dans  $A$  (resp.  $y_1$  dans  $B$ ) on a aussi  $y$  dans  $A$  (resp. dans  $B$ ) pour  $y \leq y_0$  (resp.  $y \geq y_1$ ). Les ensembles  $A$  et  $B$  sont donc des intervalles disjoints recouvrant  $\mathfrak{R}$ . L'un des deux, par exemple  $A$ , est fermé; on note alors  $z$  le plus grand élément de  $A$ .

Soit  $(\zeta_n)$  une suite de nombres négatifs tendant vers 0 telle que  $g_{\zeta_n}(z) < 0$  pour tout  $n$ . On peut trouver une suite strictement décroissante  $(y_n)$  tendant vers  $z$  telle que  $g_{\xi_n}(y_n) < 0$ . Chacun des  $y_n$  étant dans  $B$ , il existe  $\xi_n > \zeta_n$  tel que  $g_{\xi_n}(y_n) = 0$ . La proposition 4 montre alors que cette situation est impossible si  $E$  est séparé; on a donc  $A = \phi$  ou  $B = \phi$ .

Supposons maintenant que pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$  on a  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$ .

Soient  $(\xi_n)$  une suite de nombres négatifs tendant vers 0 et  $(y_n)$  une suite ayant une limite finie. Si  $z$  est un majorant de la suite  $(y_n)$  on a  $g_{\xi_n}(y_n) \leq g_{\xi_n}(z)$  pour tout  $n$ ; et par suite  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_{\xi_n}(y_n) = -\infty$ . L'espace  $E$  est donc séparé.

C.q.f.d.

COROLLAIRE.

|| Si  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x^{-1}(y) = +\infty$  pour tout  $y \in \mathfrak{R}$ .

## 5. CLASSIFICATION DES FIBRÉS SÉPARÉS

Soient  $\eta = (E, p, X)$  et  $\eta' = (E', p', X)$  deux fibrés sur  $X$  associés à des changements de carte  $g$  et  $g'$ , et tels que  $E$  et  $E'$  soient séparés.

PROPOSITION 6.

|| Soit  $F$  un isomorphisme de  $\eta$  sur  $\eta'$  pour le groupe  $G^+$  induisant un homéomorphisme  $f$  de  $X$  ayant  $o_1$  comme point fixe. On a alors  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y)$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$ .

La démonstration est immédiate.

Plus précisément, on a d'ailleurs:

THÉORÈME.

|| Pour que les fibrés séparés  $\eta$  et  $\eta'$  soient équivalents dans le groupe  $G^+$ , il faut et il suffit qu'on ait  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y)$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$

La condition nécessaire est une conséquence de la proposition 6. Supposons donc que  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = \lim_{x \rightarrow 0} g'_x(y) = -\infty$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$  (le cas

où cette limite est  $+\infty$  se traiterait de façon analogue).

LEMME 1.

Il existe une application  $f$  de  $[-1, 0[$  dans  $\mathfrak{R}$  ayant les propriétés suivantes :

$$\left\| \begin{array}{l} a) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \\ b) g_{-1}(f(-1)) = 0 \\ c) g_x(f(x)) < 0 \quad \text{pour tout } x > -1 \\ d) \lim_{x \rightarrow 0} g_x(f(x)) = -\infty. \end{array} \right.$$

*Démonstration.* — Soit  $(y_n)_{n \geq 1}$  une suite strictement croissante de nombres positifs tendant vers l'infini. On peut construire une suite strictement croissante  $(\xi_n)_{n \geq 1}$  dans  $] -1, 0[$  tendant vers 0 et telle que l'on ait pour tout  $n$   $g_x(y_n) < -n$  pour  $x \geq \xi_n$ .

On a alors

$$\begin{aligned} g_x(y_n) &< -n && \text{pour } x \in [\xi_n, \xi_{n+1}] \\ g_{\xi_{n+1}}(y) &< -(n+1) && \text{pour } y \in [y_n, y_{n+1}]. \end{aligned}$$

Il existe donc un homéomorphisme croissant  $f_n$  de  $[\xi_n, \xi_{n+1}]$  sur  $[y_n, y_{n+1}]$  tel que  $g_x(f_n(x)) < -n$  pour tout  $x \in [\xi_n, \xi_{n+1}]$ . Le recollement des  $f_n$  détermine  $f$  sur l'intervalle  $[\xi_1, 0[$ ; on étend alors  $f$  à  $[-1, 0[$  de façon à satisfaire aux conditions  $a)$  et  $b)$ .

C.q.f.d.

On construit de même une application  $f'$  de  $[-1, 0[$  dans  $\mathfrak{R}$  ayant les propriétés  $a)$ ,  $b)$ ,  $c)$ ,  $d)$  du lemme 1 avec  $g'$  en place de  $g$ .

On désigne par  $F$  (resp.  $F'$ ) le fermé réunion de la droite  $x = 0$  et de l'ensemble des points  $(x, y)$  tels que  $-1 \leq x < 0$  et  $|y| \leq |g_x(f(x))|$  (resp.  $|y| \leq |g'_x(f'(x))|$ ).

LEMME 2.

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Il existe un homéomorphisme de } F \text{ sur } F' \text{ de la forme} \\ (x, y) \rightarrow (x, e_x(y)) \text{ où pour tout } x, e_x \text{ est une application croissante,} \\ \text{et } e_0 = \text{identité.} \end{array} \right.$$

*Démonstration.* — On définit  $e_x(y)$  par

$$\begin{aligned} e_x(y) &= y && \text{si } |y| \leq \frac{1}{2} \inf(|g_x(f(x))|, |g'_x(f'(x))|) \\ e_x(g_x(f(x))) &= g'_x(f'(x)) \end{aligned}$$

$$e_x(-g_x(f(x))) = -g'_x(f'(x))$$

$$e_x \text{ est affine pour } y \geq \frac{1}{2} \inf(|g_x(f(x))|, |g'_x(f'(x))|) \\ \text{et } y \leq -\frac{1}{2} \inf(|g_x(f(x))|, |g'_x(f'(x))|) \\ \text{C.q.f.d.}$$

LEMME 3.

Il existe une application continue  $\alpha$  de  $\mathfrak{R}$  dans  $G^+$  ayant les propriétés suivantes:

$$\alpha_x = \text{identité pour } x \leq -1 \quad \text{et } x \geq 0$$

$$\alpha_x(y) = g_x^{-1} e_x^{-1} g'_x(y) \quad \text{si } g'_x(y) \in F'.$$

On construit  $\alpha$  par un procédé analogue à celui utilisé dans la démonstration du lemme 2.

*Démonstration du théorème.* — On définit une application continue  $\beta$  de  $\mathfrak{R}$  dans  $G^+$  par

$$\beta_x = \text{identité} \quad \text{si } x \geq 0$$

$$\beta_x(y) = e_x(y) \quad \text{si } (x, y) \in F$$

$$\beta_x(y) = g'_x \alpha_x^{-1} g_x^{-1}(y) \quad \text{si } x < 0 \text{ et } (x, y) \notin F.$$

On a alors  $\beta_x g_x \alpha_x = g'_x$  pour tout  $x < 0$ .

C.q.f.d.

COROLLAIRE 1.

Pour le groupe  $G^+$  il existe deux classes d'équivalence de fibrés séparés sur  $X$ .

En effet, si  $\eta$  est défini par un changement de carte  $g$  tel que  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = -\infty$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$  il est équivalent dans  $G^+$  au fibré  $\eta_1$

associé au changement de carte  $g'_x(y) = y + \frac{1}{x}$ .

Si, par contre,  $\lim_{x \rightarrow 0} g_x(y) = +\infty$  pour tout  $y$  dans  $\mathfrak{R}$ ,  $\eta$  est équivalent

dans  $G^+$  au fibré  $\eta_2$  associé au changement de carte  $g''_x(y) = y - \frac{1}{x}$ .

Enfin on a remarqué après la proposition 2 que les fibrés  $\eta_1$  et  $\eta_2$  ne sont pas équivalents dans  $G$ .

Mais  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont isomorphes dans  $G^+$  et équivalents dans  $G$ ; on a donc :

COROLLAIRE 2.

|| Tous les fibrés séparés sur  $X$  sont isomorphes pour le groupe  $G^+$ .

COROLLAIRE 3.

|| Tous les fibrés séparés sur  $X$  sont équivalents pour le groupe  $G$ .

On peut traduire ces corollaires dans la théorie des feuilletages du plan. Rappelons pour cela que deux structures feuilletées  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  du plan sont équivalentes pour un groupe  $\Gamma$  d'homéomorphismes du plan s'il existe un homéomorphisme  $f$  dans  $\Gamma$  qui transforme chaque feuille de  $\mathcal{F}$  en une feuille de  $\mathcal{F}'$ ; si  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  sont orientées  $f$  doit de plus être compatible avec les orientations de ces feuilles. On a alors (comparer à [2]):

COROLLAIRE 4.

|| Tous les feuilletages (non orientés) du plan dont l'espace des feuilles est le branchement simple sont équivalents pour le groupe des homéomorphismes conservant l'orientation.

COROLLAIRE 5.

|| Pour le groupe des homéomorphismes conservant l'orientation, les feuilletages orientés du plan dont l'espace des feuilles est le branchement simple se répartissent en deux classes d'équivalence.

COROLLAIRE 6.

|| Tous les feuilletages orientés du plan dont l'espace des feuilles est le branchement simple sont équivalents pour le groupe des homéomorphismes.

## 6. SPÉCIALISATION DU GROUPE DE STRUCTURE

Les résultats précédents montrent que chaque fibré séparé sur  $X$  est équivalent dans  $G^+$  à un fibré pour lequel le changement de carte prend ses valeurs dans le groupe  $T$  des translations de  $\mathfrak{R}$ . On peut donc se proposer d'étudier les fibrés localement triviaux de base  $X$ , de fibre  $\mathfrak{R}$  et de groupe  $T$ ; un changement de carte s'identifie alors à une application continue de  $] -\infty, 0 [$  dans  $\mathfrak{R}$ . Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux telles applications, les fibrés associés sont isomorphes dans  $T$  si et seulement si il existe un homéomorphisme  $f$  de

$] -\infty, 0]$  tel que  $\alpha(x) - \beta(f(x))$  se prolonge à  $\mathfrak{R}$ ; ils sont équivalents si  $\alpha(x) - \beta(x)$  se prolonge à  $\mathfrak{R}$ . Par exemple les fibrés définis par  $\alpha(x) = \frac{1}{x}$  et  $\beta(x) = -\frac{1}{x^2}$  sont isomorphes, mais ne sont pas équivalents dans  $T$ ; les fibrés définis par  $\alpha(x) = \frac{1}{x}$  et  $\beta(x) = \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$  ne sont pas isomorphes dans  $T$  (mais sont équivalents dans  $G^+$ ).

On peut aussi réduire le groupe de structure au sous-groupe  $H$  des difféomorphismes de  $\mathfrak{R}$  et au sous-groupe  $H^+ = H \cap G^+$ .

Si l'on suppose de plus que  $X$  est muni d'une structure différentiable, on peut aussi se restreindre aux applications  $f$  dans  $H$  (ou  $H^+$ ) qui déterminent des applications différentiables du produit de la source de  $f$  par  $\mathfrak{R}$  dans  $\mathfrak{R}$ . Avec cette restriction, on démontre, comme dans le cas continu, le même théorème de classification des fibrés différentiables séparés sur  $X$ .

Par contre on ne peut pas déduire de ce résultat une classification différentiable simple des feuilletages différentiables du plan. Il existe en effet des structures feuilletées différentiables du plan ayant le branchement simple pour espace des feuilles, et induisant sur  $X$  des structures différentiables non difféomorphes [1].

## REFERENCES

- [1] HAEFLIGER, A. et G. REEB, Variétés (non séparées) à une dimension et structures feuilletées du plan. *Ens. Math.*, 3, 1957, pp. 107-125.
- [2] KAPLAN, W., Regular curve-families filling the plane. Part I: *Duke Math. J.*, 7, 1940, pp. 154-185; part II: *Duke Math. J.*, 8, 1941, pp. 11-46.
- [3] STEENROD, N., *The topology of fibre-bundles*. Princeton University Press, 1951.

(Reçu le 1<sup>er</sup> décembre 1966)

Institut de Recherche mathématique avancée  
Université de Strasbourg.

**Vide-leer-empty**